便笺标题 2013/6/20

博弈论

林建华

email : jianhualin@xmu.edu.cn

新浪微博 : @假说而已

电子教书. 相关资料均发布在微博上

参考书: A Primer in Game Theory , Gibbons
(Game Theory for Applied Economists)

网站: "人大经济论坛" 有更多教材、资料.

公开课: 耶鲁大学公开课 : 博弈论 (网易公开课网站)

博弈论: 研究两人或多人决策问题, 其中每个人的决策都会对其他人的决策产生影响.

一、课程目的:

① 数学该怎么用?

② 考虑问题, 不单单从自己角度, 也从他人角度.

授课对象: 主要为数学学院二年级学生

少数为非数学学院的学生.

先修课程: 相关博弈的入门知识.

授课时: 用严格的数学语言来描述具体问题.

原因: 少数服从多数原则 (这个原则正确吗?)

考核方式: 平时考勤+课堂试验+小论文

不用考试.

小论文主题 大致第三周确定.

课堂试验 把关于博弈的试验.

VISIT…

平时考勤 如何做？

观点：靠点名留住学生的老师不是"好"老师！

观点：态度决定一切！

博弈论的运用一：机制设计设计.

目的：用最少的时间点名来保证足够高的出勤率！

以下是假想的机制，不代表本课程将要采用的机制！

机制一：旷课一次，直接挂科！

如果这样多次的惩罚机制有威慑力的话，

而且老师每堂课都对所有同学点名，

结果：学生无人旷课！

机制二：对机制一点名方式修正，

老师只需在感觉有人旷课时，对所有同学点名！

什么叫"感觉有人旷课"？

现在从数学角度上作一种明确定义或者说假设，

老师是否点名根据假设而定. "公理化定义"

假设A：如果旷课人数>5，老师感觉有人旷课，

("感觉"的一种定义) 因此点名，其他情形不点名.

这个假设A本身就是老师的决策.

假设B：同学们知道了假设A.

在假设B下，

同学的决策：大多数同学选择不逃课！

会有少数同学有策略性选择逃课！

↓(一种定义)

假设C：发现有人逃，则不逃；没发现有人逃，则逃.

少数同学中：同学甲知道少数中的绝对常用假设 C.

甲想逃课，甲要怎么做？

假设B：同学们知道了假设A.

上述思考式，隐含了假设：老师不知道假设B.

推广→ 假设D：老师知道了假设B.

在假设D下，老师可以随意点，有时也不接受点.

或者其它策略：例如，一直不点名.……

甚至无策略.

假设E：同学们知道了假设D.

在假设E下，原来冒险的同学会大大减少.

上述例子的阐述涉及到了一个很复杂的"知道"关连：

设A为某种知识（可以是某种假设定义，某种信念等），

若甲知道A，乙不知道A. 则A为甲的私有知识.

若甲知道A. 乙知道A. 此时A不足以成为甲.乙

的公共知识. 因为甲可能以为乙不知道A.

定义知识A为甲.乙的公共知识，若

甲知道A，乙知道A，甲知道乙知道A，乙知道甲知道A，

甲知道乙知道甲知道A，乙知道甲知道乙知道A，……

@李承鹏：我们知道他们在撒谎，他们也知道我们知道他们在撒谎，我们也知道其实他们知道我们知道他们在撒谎，他们也知道我们是假装他们没在撒谎……这是现状。大家彼此靠谎言，而且互相都确知这是谎言来度日。就是索尔仁尼琴说的：谎言成为这个国家的支柱产业。

微博悲剧：

@假设而已：发一条微博，我看到微博显示了它，我就以为你能看到它，我默认了它是公共知识——我知道它（我发的自然知道），你知道它（我默认的），我知道你知道它（我得注意言辞），你知道我知道你知道它（你才会发评论），……，然而，邪恶的是——居然可以直接屏蔽不让"你知道它"，而我却不知道！

继续回到点名机制："日了课一次，直接挂科！"

过分多余的惩罚机制通常难以实施，是被时常吐槽的，我看没是吓唬人的！尽管如此，仍然还是有很强的威慑力，仍然能镇住大部分同学。

博弈论也研究这类"威胁"机制。

"为何不选择可以如实执行的小惩罚机制，
而选择不能如实执行的重大的惩罚机制？"

"园中各样树上的果子，你可以随意吃，
只是分别善恶树上的果子，你不可吃，
因为你吃的日子必定死。"

总评成绩计算方法：

① 课堂试验：大致3～4次。

每次参与试验的同学奖送10分。

试验得分可能为负，绝对值最大的负分为-4。

保证参与试验的同学至少得6分，时课的同学则为0分。

参与试验的同学最终得分可以超过10分。

② 小论文的分数怎么看具体的试验次数而定.

即若试验3次. 则小论文分数怎么分为70分.

若试验4次. 则小论文分数怎么分为60分.

③ 考勤只加分. 即课一次加10分.

随机点名法: "Excel" Rand() 产生区间(0,1)上的均匀分布.

$$\text{trunc}(10*\text{Rand}(),0) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 9 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & \cdots & 0.1 \end{pmatrix}$$

一般点2个尾号.

补充方法: 上次点名或者试验没来的同学

会继续点, 点到来为止.

旷课4次以及4次以上, 不及格.

点名的简化试验模型. "game theory"

首先每位参与试验的同学先送10分.

每位同学的策略选择有两个: 逃课. 不逃.

为"虚拟"的选择.

可以换为任意两个代号.

如果我选择"点名". 则

选择"逃课"的同学加2分.

选择"不逃"的同学加 $\min\{5, [\frac{n}{2}]\}$,

其中n为选择"逃课"的同学数.

如果我选择"不点名". 则

选择"逃课"的同学加 $\max\{0, [\frac{11-n}{2}]\}$ 分,

选择"不逃"的同学不加, 也不扣分.

假设"点名"两次. 每次点名", 每位同学作出"逃"或"不逃"的选择.

姓名: _____

学号: _____

院系: _____

选择: _____ 为(逃,逃),(逃,不逃)

(不逃,逃),(不逃,不逃)

四种组合中的一种.

注：不按上述方式选择，视为弃权，不加分，也不扣分。

我的两次选择采用随机方式。

$Trunc(10*Rand(),0) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 9 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & \cdots & 0.1 \end{pmatrix}$

		概率
0, 1, 2, …, 6：	（不点名，不点名）	0.7
7：	（点名，不点名）	0.1
8：	（不点名，点名）	0.1
9：	（点名，点名）	0.1

> 0.2

6月27日

上次试验结果：

(出，不出)	11
(不出，出)	10
(出，出)	1
(不出，不出)	79

101

课程目的：

① 数学该怎么用？

② 考虑问题，不单单从自己角度，也从他人角度。

实际问题 → 数学问题 → 解决数学问题 → 解释实际问题

数学建模

数学家

数学体系：公理化假设体系

概率论：建立在概率的公理化定义体系上

例如 对于一个抛硬币试验 建立如下概率模型：

随机试验 E：向上抛一枚硬币，观察硬币落地后的情况。

引入样本空间 $\Omega = \{H, T\}$，

其中元素 H 表示结果：正面向上。

元素 T 表示结果：反面向上。

A^C

引入事件域 $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$，其中 $A = \{H\}$.

定义事件域 $\mathcal{F}$ 上的元素为 E 的事件.

构建定义在 $\mathcal{F}$ 上的函数，如果它为是概率的公理化定义，则称为概率函数 $P(\cdot)$

$$\mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$$
$$A \mapsto P(A)$$

$P(A)$ 称为事件 A 的概率.

例如 古典概型 中，$P(\cdot)$ 的赋值如下

$P(\phi)=0$，$P(\Omega)=1$，$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(\bar{A})=1-P(A)$.

这个例子中也包含了对"抛硬币试验"的数学建模过程.

这种数学建模过程也包含了公理化假设体系的思想.

例如：$\Omega=\{H,T\}$ 表示该试验只会出现"正面向上"和"反面向上"两种结果. → "假设"

$P(A)=\frac{9}{10}$ → 解释：

学了概率论之后，如何看待福利彩票、体育彩票（不含对足球等体育赛事预测的彩票）这类彩票的预测问题？

假设各期结果是 独立的，

则 这类彩票是不能预测的.

@假设而已：结论只不过是假设的同义反复而已.

数学家是中立的：

(1) 考虑一个实际问题，假设 它可以用某种数学模型描述.

(2) 这个数学模型按数学家的假设的方法进行解决，得到某个结论.

(3) 因此这个实际问题，如果真的可以用这个模型描述并且就按假设的方法解决的，那么这个实际问题就会表现出(2)中结论的现象来.

考虑十事来论问题也是如此！

问题：难道假设不能验证？

本课程的立场问题：既然结论只是假设的同义反复而已，因此本课程叙述的所有结论都不代表我的立场。

@周立波：从下观点仅代表周立波扮演的周立波的立场，与周立波本人无关！

博弈论的应用之一：制度的选择和设计问题。

以下例子与博弈论无关，与制度选择有关！

简单的数学也能"解释"复杂的制度问题。

假设有两个国家其财富分布相同，如下所示：

富人集团：20%的人掌握了80%的财富；

穷人集团：80%的人掌握了20%的财富。

假设这两个国家的人口数均为1亿。

为问题的简便练习，假设同一个集团内部财富实全平均化。即富人集团内：任意1%的人掌握4%的财富。

假设这两个国家其领导人都拥有能力让个人财富得到增长。能力值均为2亿。如果其领导人对某个人分配能力数值为x，则其财富下一年增长x%。

现在国家A，其领导人有2亿能力值只分配1给富人集团，且平均分配，则每个富人得到能力值$\frac{2}{2}=10$

因此 其财富下一年增长 10%. 而穷人集团财富不变.

这个国家的财富增长了 80% * 1.1 + 20% * 1 - 1 = 8%.

现在国家B，其领导人将2亿能力值只分配1个穷人集团，且平均分配，则每个穷人得到能力值 $\frac{20}{8}=2.5$

因此 其财富下一年增长2.5%. 而穷人集团财富不变.

这个国家的财富增长了 80% * 1 + 20% * 1.025 - 1 = 0.5%

你赞同A还是B？

哪个更像"社会主义制度"？哪个更像"资本主义制度"？

问题：什么叫科学？

我所理解的科学，或者说我所扮演的我所理解的科学.

科学方法论体系：对某类复杂问题进行观测，提出一套理论，这套理论符合以往观测，甚至还能对未来进行预测. 则这套理论是对此类问题目前为止合理的理论. 随着时间的推移可能会发现这套理论有一定适用范围，超过适用范围，则需要构建其它理论.

科学结论其实都包含了一系列条件.

科学 ≠ 真理. 正确.

科学追求真理！

"科学"一词的误用 {① 学科 ② 正确的代名词

信科学 ≠ 迷信 谁能判断正确？

课程目的：

① 数学该怎么用？

② 考虑问题，不单单从自己角度，也从他人角度。

假设体系 + 他人角度：

@假设而已：想和某个人讨论问题，你得先了解他，了解他说过的话，从他说过的话里了解他的逻辑，按他的逻辑来与他讨论问题，这样也许他会比较容易接受。

@笑蜀：历史的笑声

二. 最经典的博弈例子 —— 囚徒博弈

故事：警察抓了两名嫌疑犯，苦于没有证据，
只能控告较小的罪名，现在分别关押审讯，
希望有一方出卖对做污点证人。

假设：只控告较小罪名下，两人都被判1年刑期；
若有一方坦白，对做污点证人，则污点证人
被释放，另一方则被判15年刑期；
如果双方都坦白罪行，则两人都被判10年刑期。

现在问两个嫌疑犯该怎么办？

首先进行数学化，也即用严格的数学语言描述。

和抛硬币试验的数学化有些类似。

①引入参与人集合 $I=\{1,2\}$，其中"i"表示嫌疑犯i，
$i=1,2$。

②引入参与人的策略集合。

参与人1的策略集合 $S_1=\{1,2\}$，其中"1"表示"坦白"
"2"表示"抗拒"

参与人2的策略集合 $S_2 = \{1, 2\}$.

对 $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$

构成策略组合 $s = (s_1, s_2)$

则 $s = (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2 = \{(s_1, s_2) : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$

$\triangleq S$ (笛卡尔乘积)

"2×2"博弈　　称为策略空间

$S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

"1"表示"坦白"
"2"表示"抗拒"

(3) 参与人的收益或效用

参与人i的效用函数 $S \to R$

$s \mapsto \pi_i(s)$

$\pi_1(s)$: $\pi_1(1,1) = -10$, $\pi_1(1,2) = 0$
$\pi_1(2,1) = -15$, $\pi_1(2,2) = -1$

"1"表示"坦白"
"2"表示"抗拒"

$\pi_2(s)$ $\pi_2(1,1) = -10$, $\pi_2(1,2) = -15$
$\pi_2(2,1) = 0$, $\pi_2(2,2) = -1$

对任意的 $s \in S$, 有两人效用 $\pi_1(s)$, $\pi_2(s)$

构成效用组合 $(\pi_1(s), \pi_2(s)) \triangleq \pi(s)$

则效用组合为 $S \to R^2$

$s \mapsto \pi(s) = (\pi_1(s), \pi_2(s))$

这是个向量值函数　即值域为二维实数集上的二维向量.

因此, 得到博弈的标准式表示法

$G = (I, S, \pi)$

7月1日

二. 最经典的博弈例子 —— 囚徒博弈

故事：警察抓了两名嫌疑犯，苦于没有证据，
只能控告较小的罪名，现在分别关押审讯，
希望有一方出卖对做污点证人。

假设：只控告较小罪名下，两人都被判1年刑期；
若有一方坦白，转做污点证人，则污点证人
被释放，另一方则被判15年刑期；
如果双方都坦白罪行，则两人都被判10年刑期。

数学化：

① 引入参与人集合 $I=\{1,2\}$，其中"i"表示嫌疑犯 i，
$i=1,2$.

② 引入参与人的策略集合.

参与人1的策略集合 $S_1=\{1,2\}$，其中"1"表示"坦白"
"2"表示"抗拒"

参与人2的策略集合 $S_2=\{1,2\}$.

对 $s_1\in S_1$，$s_2\in S_2$

构成策略组合 $s=(s_1,s_2)$

则 $s=(s_1,s_2)\in S_1\times S_2=\{(s_1,s_2): s_1\in S_1,\ s_2\in S_2\}$
（笛卡尔乘积）

$\triangleq S$

"2X2"博弈　　称为策略空间

$S=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

③ 参与人的收益或效用

参与人 i 的效用函数 $S\to R$

$s\mapsto \pi_i(s)$

$\pi_1(s)$：$\pi_1(1,1)=-10$，$\pi_1(1,2)=0$

$\pi_1(2,1)=-15$，$\pi_1(2,2)=-1$

"1"表示"坦白"
"2"表示"抗拒"

$\pi_2(S)$ $\begin{cases} \pi_2(1,1) = -10 \quad , \quad \pi_2(1,2) = -15 \\ \pi_2(2,1) = 0 \quad , \quad \pi_2(2,2) = -1 \end{cases}$

效用：对收益的数值测量，依具体而定

这里直接用利润加总表示.

对任意的 $s \in S$，有两人效用 $\pi_1(s)$, $\pi_2(s)$

构成效用组合 $(\pi_1(s), \pi_2(s)) \triangleq \pi(s)$

则效用组合为 $S \to R^2$

$s \mapsto \pi(s) = (\pi_1(s), \pi_2(s))$

这是个向量值函数 即值域为二维实数集上的二维向量.

基础微积分（数学分析）较少考虑这样的问题

实际问题的数学化，常常引发更多的数学研究对象.

最终，得到博弈的标准式表示法

$G = (I, S, \pi)$

可以推广到一般情形：

(1) $I = \{1, 2, \cdots, n\}$

"[0,1]"

(2) $S_i = \{1, 2, \cdots, m_i\}$ （有限个策略，m_i 个策略）

$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$

(3) $\pi_i: \begin{array}{l} S \to R \\ s \mapsto \pi_i(s) \end{array}$

$\pi: \begin{array}{l} S \to R^n \\ s \mapsto \pi(s) = (\pi_1(s), \cdots, \pi_n(s)) \end{array}$

构成 $G = (I, S, \pi)$

在2人有限个策略下，通常用"双元素的效用表"表示

例如，这个例子，其中每一个单元格的第1个元素代表

参与人1的效用，第2个元素代表参与人2的效用.

"2"

"1"		1	2
	1	-10, -10	0, -15
	2	-15, 0	-1, -1

求

参与人2

参与人1		坦白	抗拒
	坦白	-10, -10	0, -15
	抗拒	-15, 0	-1, -1

以上是博弈模型，接着是解的定义.

需要注意的是解的定义方式有多种.

仍以囚徒博弈为例，其解的定义逻辑如下：

参与人2

参与人1		坦白	抗拒
	坦白	-10, -10	0, -15
	抗拒	-15, 0	-1, -1

对于参与人1而言.

他或她发现选择"坦白"比选择"抗拒"好，

因为若2选择"坦白"，他或她选择"坦白"效用为"-10"

选择"抗拒"效用为"-15"

此时"坦白"比选择"抗拒"好；

若2选择"抗拒"，他或她选择"坦白"效用为"0"

选择"抗拒"效用为"-1"；

此时"坦白"比选择"抗拒"好.

即不论参与人2选择何策略，

参与人1选择"坦白"总是比选择"抗拒"好.

称"坦白"策略严格占优"抗拒"策略.

或者称"抗拒"策略还被多特占优策略.

一种"理性"假设：所有的参与人都不采用被多特占优策略.

因此，在这样的"理性"假设下，参与人1不采用"抗拒"策略. 参与人2也不采用"抗拒"策略，因为…

于是两个参与人都采用了"坦白"策略，结果被判了10年牢.

参与人1 \ 参与人2	坦白	抗拒
坦白	-10, -10	0, -15
抗拒	-15, 0	-1, -1

然而他们有更好地选择. 即都采用"抗拒"策略，只需被关1年牢.

称策略组合(抗拒，抗拒)帕雷托(Pareto)优于策略组合(坦白，坦白).

一般定义. 在博弈 $G=\langle I, S, \pi\rangle$ 中，$I=\{1,\dots,n\}$.

设 $s\in S$，$t\in S$. 称 s 帕雷托优于 t，

若存在 $i\in I$，使得 $\pi_i(s)>\pi_i(t)$.

对任意的 $j\in I-\{i\}$，使得 $\pi_j(s)\geq\pi_j(t)$.

$(\exists i\in I,\ s.t.\ \pi_i(s)>\pi_i(t)\ ;\ \forall j\in I-\{i\},\ s.t.\ \pi_j(s)\geq\pi_j(t).)$

(such that)

评言：s 相对于 t 而言，至少有一人的利益得到提升，而其他人的利益并没有受损.

参与人1 \ 参与人2	坦白	抗拒
坦白	-10, -10	0, -15
抗拒	-15, 0	-1, -1

这两人被抓前，都约定：选择抗拒. 他们会遵守约定吗?

如果仅仅是口头约定，没有对被用值守生影响，则这样的约定不会被遵守. 因为假设"2"选择守约定，那么"1"发现不选择约定，可以被释放，不必被关1年牢；如果"1"觉得"2"不会守约定，而自己选择遵守约定，则要冒被判15年牢的风险，

"1"更不想守约定了. → "囚徒困境"

注意：如果不是口头约定，而是对"权用"值产生影响的约定，则结果就会发生变化.

例如，两人隶属于某黑社会集团，且这个集团势力足够强大，两人作案前，这个集团老大发话，谁胜假如污点证人，就 ····

		参与人2	
		坦白	抗拒
参与人1	坦白	-10-20, -10-20	0-20, -15
	抗拒	-15, 0-20	-1, -1

理解"权用"

对于参与人1而言：

参与人2 坦白：坦白 -30，抗拒 -15

参与人2 抗拒：坦白 -20，抗拒 -1

因此"抗拒"多格占优于"坦白".

结果两人都选择了"抗拒". 只被1年牢.

特别注意：老大的威胁并没有实现的机会.

"预防"比"出了事再惩罚"来得重要得多！

上述解的一般问题的定义：

首先引入一个符号：

设 $s=(s_1,\cdots,s_n)\in S$，$t=(t_1,\cdots,t_n)\in S$

满足 对某个确知的 $i\in I$，有 $t_i=h\in S_i$，$t_j=s_j\ (j\neq i)$.

则记 $t=(h,s_{-i})$.

文字含义：t 相当于 s 而言，只有参与人 i 改用策略 h，而其他参与人仍采用策略组合 s 中相对于自己的策略.

定义：对参与人 i 而言，称 $h\in S_i$ 劣格占优 $k\in S_i$

若 $T_i(h,s_{-i})>T_i(k,s_{-i})$，对 $\forall s\in S$ 都成立.

只要有这样的 h 存在，则称 k 为被劣格占优的策略.

在"理性"假设下，参与人 i 的采用的策略为 S_i 的如下子集：

$$S_i^1 = S_i - \{k \in S_i \mid \exists h \in S_i,\ \pi_i(h, s_{-i}) > \pi_i(k, s_{-i}) \text{ 对 } \forall s \in S \text{ 都成立}\}.$$

记 $S^1 = S_1^1 \times S_2^1 \times \cdots \times S_n^1$，则 $S^1 \subseteq S$.

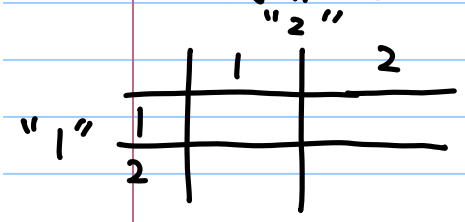
若 S^1 恰好为单点集，只包含一个元素，设为 $d=(d_1,\cdots,d_n)$.

则称 策略组合 d 为 t 事来 G 的 多格占优解.

注：S^1 恰好为单点集 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall i \in I$，S_i^1 为单点集.

也就是说，每个参与人都只有唯一一个策略可以选择，其余策略都是他们各自的被多格占优策略.

"2×2"事来 造成 囚徒困境的一般条件：



① 对参与人 i 而言，策略"1" 多格占优于策略"2"

$$\pi_1(1,1) > \pi_1(2,1), \quad \pi_1(1,2) > \pi_1(2,2)$$

$$\pi_2(1,1) > \pi_2(1,2), \quad \pi_2(2,1) > \pi_2(2,2)$$

② 策略组合 $(2,2)$ 帕雷托优于策略组合 $(1,1)$

$$\pi_1(2,2) > \pi_1(1,1)$$

$$\pi_2(2,2) > \pi_2(1,1)$$

因此有 $\pi_1(1,2) > \pi_1(2,2) > \pi_1(1,1) > \pi_1(2,1)$；

$\pi_2(2,1) > \pi_2(2,2) > \pi_2(1,1) > \pi_2(1,2)$.

"极端"的例子.

	1		2	
1	1	1	10^8+1	0
2	0	10^8+1	10^8	10^8

两人参与一项投资，均有两个投资策略1，2，收益如上。

按"理性"假设：每个参与人都不采用被占优的策略。

结果两人都选择了策略1，结果都只得到一元收益。

然而他们本来有机会都成为亿元富翁。

为什么他们不能"合作"都选择策略"2"？

定义 策略"2"为"合作"策略，

策略"1"为"背叛"策略。

囚徒博弈试验：同样首发对每位同学先送10分！

为了便于全体同学参与试验，我们需要对模型进行修改。（数学模型的实际应用过程，根据实际需要对模型进行修改）

	背叛	合作
背叛	-2，-2	4，-4
合作	-4，4	2，2

如果只进行较量的两人博弈，很难实现"合作"！

现在我们需要基于上述两人博弈模型，推广到n人博弈模型。记分规则如下：

首发每个人都只能从"背叛"，"合作"中选一个。（未按规定，默认"合作"）

统计人数。

假设有a%同学选"背叛"，1-a%同学选"合作"。

	背叛	合作
背叛	-2，-2	4，-4
合作	-4，4	2，2

则选择"背叛"的同学得分为期望：$a\% \cdot (-2) + (1-a\%) \cdot 4$

而选择"合作"的同学得分为

$a\% \cdot (-4) + (1-a\%) \cdot 2$

总之，"背叛"分数 > "合作"分数；
但 "背叛"分数 − "合作"分数 = 2.

姓名、学号、
段条、选择

当有越多的个体愿意牺牲个人利益时，
集体利益就会被提升！

@亚当·斯密：每个人都追求个人利益最大化，
则整体利益也将实现最大化，
这是自由经济体制被提倡的基本原因.

而我们这个试验则完全相反：每个人都放弃个人
利益最大化，则整体利益实现最大化！

7月4日

二. 最经典的博弈例子 —— 囚徒博弈

上节试验：

假设有a%同学选"背叛"，1-a%同学选"合作".

	背叛	合作
背叛	-2, -2	4, -4
合作	-4, 4	2, 2

则选择"背叛"的同学得分为

期望：$a\% \cdot (-2) + (1-a\%) \cdot 4$

而选择"合作"的同学得分为

$a\% \cdot (-4) + (1-a\%) \cdot 2$

试验结果：$a\% = 35.2\%$

"背叛"得分为 1.888　　+10 = 11.888 ≈ 12

"合作"得分为 -0.112　　+10 = 9.888 ≈ 10

这个试验一种特别来解决方法：

现在有一个人站出来，不管他或她采用什么方法，威胁，暴力迫吓，又或者用他的人格魅力，等等，总之，他或她将所有同学选择权收回到他或她手中，那么他或她将替所有同学（除了他自己）选择"合作"，而他或她选择"背叛".

假设班级人数足够多，则

"背叛"的比例 $b\% \approx 0$

"合作"的比例 $1-b\% \approx 1$

因此，他或她得分（即背叛得分）

$b\% \cdot (-2) + (1-b\%) \cdot 4 \approx 4$.

其他同学得分（即合作得分）

$b\% \cdot (-4) + (1-b\%) \cdot 2 \approx 2$.

对于一开始的机制，背叛得分 高于 合作得分.

若"背叛"得分 $a\%\cdot(-2)+(1-a\%)\cdot 4 \geq 2$.

则 需要 "背叛"比例 $a\% \leq \frac{1}{3}$.

"合作"比例 $1-a\% \geq \frac{2}{3}$

也就是说，一开始的机制中，"合作"比例 未达到 $\frac{2}{3}$，

则 最高得分（即"背叛"得分）不超过 2分.

也就是说，这个机制 从 帕累托意义 角度上

并不如 有人主导出来的机制.

有人站岗的机制 → "独裁"

一开始的机制 → "自由民主"

结论："独裁" 优于 "自由民主"！

"政治哲学"

@ 霍布斯 (1588-1679)：《利维坦》

指定一个人或一个由多人组成的集体来代表他们

的人格，每一个人都承认自己和于如此承当

本身人格的人在有关公共和平及安全方面所采

取的任何行为，或命令他人作出的行为.

在这种行为中，大家都把自己的意志服从他

的意志，把自己的判断服从于他的判断.

当代表者只是一个人的时候，国家就是君主国，

如果是集在一起的全部人的会议时便是民主国家，

如果只是一部分人组成的会议便称为贵族国家，

在君主政体之下感到不满的人就称之为僭主政体，

而不高兴贵族政体的人就称之为寡头政体，

在民主政体之下感到不满的人就称之为无政府状态。

君主制 > 禅让制 > 民主制

"囚徒困境"式的语言：

@马丁·尼莫拉牧师：他们追杀共产主义者的时候，我没有说话——因为我不是共产主义者；他们追杀犹太人的时候，我没有说话——因为我不是犹太人；他们追杀工会成员的时候，我没有说话——因为我不是工会成员；他们追杀天主教徒的时候，我没有说话——因为我是新教教徒；最后他们奔我而来，已经没有人能为我说话了。

@假设而已：说这些话时，特别警惕假民主！假如他们希望改变现状，期待流血！但他们更期待流的是别人的血！

多关注民生问题，少关注民主和民族问题。

数学表用的注意点：
需要注意的是：在自由选择情况下，
描"理性"假设：每个参与人都不选择被占优的策略
不论 q% 为多少，"背叛"得分 > "合作"得分
也即不论其他参与人选择什么策略，对参与人i而言，
"背叛"得分总是大于"合作"得分。因此：
"背叛"多将占优"合作"。则"合作"是被占优的策略。
于是每个参与人描"理性"假设，都会采用"背叛"策略。
但我们的实验结果却不是如此，也就是说：

实际并不总是与理论相符合，这也是数学应用中需要特别注意的一点！

三."理性"假设作为"公共知识"

考虑两人博弈 $G=(I, S, \pi)$，$I=\{1,2\}$

"理性"假设：每个参与人都不采用被劣格占优策略。

因此，参与人 i 只采用 S_i 的子集 S_i^1 中的一个策略。

其中 被劣格占优策略

$$S_1^1 = S_1 - \{k \in S_1 \mid \exists h \in S_1, \text{ s.t. } \pi_1(h, s_2) > \pi_1(k, s_2) \text{ 对 } \forall s_2 \in S_2 \text{ 都成立}\}$$

$$S_2^1 = S_2 - \{k \in S_2 \mid \exists h \in S_2, \text{ s.t. } \pi_2(s_1, h) > \pi_2(s_1, k) \text{ 对 } \forall s_1 \in S_1 \text{ 都成立}\}$$

若 $S^1 = S_1^1 \times S_2^1$ 为单点集，设该元素为 $d=(d_1, d_2)$

则 $d=(d_1, d_2)$ 为博弈 G 的劣格占优解。

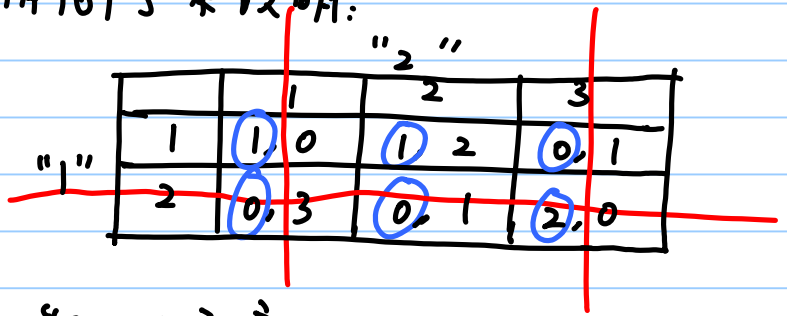
"S^1 为单点集"这个限制条件是非常强的条件，

通常并不满足，或者说上述定义的劣格占优解

常常不存在。因此需要放宽这个限制条件。

一种放宽方式就是，将"理性"假设作为公共知识！

以具体例子来说明：



首先对参与人 1 而言，

不存在被劣格占优的策略。

因为 1 vs 0，1 vs 0，0 vs 2

也就是说 $S_1' = S_1 - \phi = S_1 = \{1,2\}$

不是单点集，因此不存在弱被占优解.

"1" \ "2"	1	2	3
1	1, 0	1, 2	0, 1
2	0, 3	0, 1	2, 0

但对于参与人2而言，

策略2弱被占优策略3

因为 $2 > 1$, $1 > 0$

即策略3是被弱被占优策略.

则有 $S_2' = S_2 - \{3\} = \{1,2,3\} - \{3\} = \{1,2\}$.

因此 $S' = S_1' \times S_2'$.

在"理性"作为公共知识假设下，有

(1) 参与人2是理性的，

不采用被弱被占优策略"3".

(2) 参与人1知道(1)，

即参与人1知道参与人2是理性的.

因此参与人1面对的博弈简化为 $G' = (I, S', \pi)$

在这里为

"1" \ "2"	1	2
1	1, 0	1, 2
2	0, 3	0, 1

此时 策略2成为参与人1的被弱被占优策略.

因为 $1 \vee 0$, $1 \vee 0$

因此，参与人1不采用策略2，即只采用策略1.

最后该 $S_1'' = S_1' - \{2\} = \{1,2\} - \{2\} = \{1\}$.

在 G' 中，参与人2不存在被弱被占优策略.

因为 $0 < 2$, $3 > 1$

即 $S_2^2 = S_2^1 - \phi = S_2^1 = \{1,2\}$.

则 $S^2 = S_1^2 \times S_2^2$.

(1) 参与人 2 是理性的，不采用"3"

(2) 参与人 1 知道 (1)；参与人 1 是理性的，不采用"2"

(3) 参与人 2 知道 (2)；参与人 2 是理性的，不采用"1".

因为此时博弈为 $G^2 = (I, S^2, \pi)$.

即

"1" \ "2"	1	2
1	1, 0	1, 2

因为 $0 < 2$

此时 $S_2^3 = S_2^2 - \{1\} = \{1,2\} - \{1\} = \{2\}$

$S_1^3 = S_1^2 = \{1\}$

则 $S^3 = S_1^3 \times S_2^3 = \{1\} \times \{2\} = \{(1,2)\}$

为单点集.

称策略组合 (1,2) 为"理性"作为公共知识假设下的子博弈纳什解.

对于一般问题可类似定义"理性"作为公共知识假设下的子博弈纳什解.

即总是从某个 $G^m = (I, S^m, \pi)$

简化为 $G^{m+1} = (I, S^{m+1}, \pi)$

直到无法简化为止，即有 $S^L = S^{L+1}$.

此时，若 S^L 为单点集，记含元素 d

则策略组合 d 为"理性"作为公共知识假设下的子博弈纳什解.

	1		2	
1	1	1	10^8+1	0
2	0	10^8+1	10^8	10^8

上节的囚徒困境这个例子已经看到"理性"假设似乎

很不理性.

而经济学的"理性"假设还进一步加强成为完全知识假设. 需要注意的"理性"只是我们自己用的一种数学定义. 没有定义无从谈问题.

而定义当然是以理论定义方式.

例如, 要想研究"疯子"的行为, 就得定义什么样的行为是"疯子"该采用的行为, 或者说合理的行为.

甚至说"理性"的行为. 也即定义理性的疯子.

说疯子时, 并没有任何贬低疯子的意思. (0)

因为博弈论的奠基人——纳什本身便是疯子.

博弈论的研究很显然与心理学有非常紧密的关系!

据说, 大学专业中最易出心理问题便是心理学专业!

"理性"博弈实验: 同样每人发送10分.

实验基于一种拍卖机制:

现在有一拍卖林的物, 即为4分.

出价最高的得到林的物.

如果出价最高的有多人, 则多人平分林的物.

不管有没有得到林的物, 只要出价不是0,

都要扣去出价的分数.

出价的分数只允许0, 1, 2, 3, 4, 5中的一个.

(不做规定, 都视为出价为0)

姓名	学号
院系	出价

1 关之拍卖

疯狂的金融市场. 虚拟市场.

① 假设A为瘸子

②B知道①

③C假装为瘸子

④D知道③

7月8日

上节课结果：6位同学出价5，他们的得分为

$$10+\left(\frac{4}{6}-5\right)=5\frac{2}{3}\approx 6$$

出价3（1位），得分为10-3=7；出价2（1位），得分8

出价1（5位），得分为9；出价0，得分为10.

四. 纳什均衡的解 "非合作博弈"

在"理性"作为公共知识假设下，

从某个 $G^m=(I, S^m, \pi)$

简化为 $G^{m+1}=(I, S^{m+1}, \pi)$

直到无法简化为止，即有 $S^k=S^{k+1}$.

此时，若 S^k 为单点集，包含元素 d

则策略组合 d 为"理性"作为公共知识假设的子博弈纳什均衡解.

但 S^k 可能不是单点集. 同样从具体例子说明：

"2"

"1"	恨	爱
恨	-10, -10	0, -20
爱	-20, 0	10, 10

"恨"，"爱"只是代号词.

对"1"不存在被子博弈纳什均衡的策略. 因为 -10 < -20, 0 < 10

对"2"不存在被子博弈纳什均衡的策略. 因为 -10 > -20, 0 < 10

因此. $S_1^1=S_1$，$S_2^1=S_2$，即 $S^1=S$

$S^1=S$ 不是单点集. 因此不存在"理性"作为公共知识的子博弈纳什均衡解.

但是这个博弈存在一种解，称为纳什均衡解.

"2"

"1"	恨	爱
恨	-10, -10	0, -20
爱	-20, 0	10, 10

例如，策略组合（恨，恨）称为纳什均衡解，满足如下特征：

假设两个参与人恰好处在(恨,恨)这个策略组合中，
则没有参与人愿意主动偏离这个组合.
即，给定参与人2采用"恨"，参与人1不会偏离"恨"
因为不偏离收益为-10> 偏离时的收益为-20;
给定参与人1采用"恨"，参与人2不会偏离"恨".
因为不偏离收益为-10> 偏离时的收益为-20.

直观语言：纳什均衡是一种稳定状态，即
"我不动，我不动". 数学上也称为"不动点".

纳什均衡的数学定义：

在 $G=(I, S, T)$ 中，策略组合 $s^*=(s_1^*, \cdots, s_n^*)$
称为纳什均衡，若对每一个参与人 $i \in I$，有
$T_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq T_i(s_i, s_{-i}^*)$ 对所有的 $s_i \in S_i$ 成立.
也就是说，s_i^* 是给定其他参与人采用 s_{-i}^* 条件下，
参与人 i 的 最中 一个 最优策略.

先考虑以下
严格纳什均衡：

在 $G=(I, S, T)$ 中，策略组合 $s^*=(s_1^*, \cdots, s_n^*)$
称为 严格 纳什均衡，若对每一个参与人 $i \in I$，有
$T_i(s_i^*, s_{-i}^*) > T_i(s_i, s_{-i}^*)$ 对所有的 $s_i \in S_i - \{s_i^*\}$ 成立，
也就是说，s_i^* 是给定其他参与人采用 s_{-i}^* 条件下，
参与人 i 的 唯一 最优策略. "给定他人不偏离，
则偏离一定变差"

继续回到例子上：

"1" \ "2"	恨	爱
恨	-10, -10	0, -20
爱	-20, 0	10, 10

我设字为

	1	2
1	-10, -10	0, -20
2	-20, 0	10, 10

结论：(1,1) 是多格纳什均衡解.

因为 $\pi_1(1,1) > \pi_1(2,1)$

$\pi_2(1,1) > \pi_2(1,2)$

	1	2
1	-10, -10	0, -20
2	-20, 0	10, 10

结论：(2,2) 是多格纳什均衡解.

因为：$\pi_1(2,2) > \pi_1(1,2)$

$\pi_2(2,2) > \pi_2(2,1)$

"2"

"1"	恨	爱
恨	-10, -10	0, -20
爱	-20, 0	10, 10

因此有两个多格纳什均衡解：

(恨,恨), (爱,爱).

问题：为何会有"(恨,恨)"这样的多格纳什均衡解？

这里，定义这样的纳什均衡为 纳什僵局.

(一般定义：假设 s, d 分别为博弈 G 的纳什均衡解，若 s 相累托优于 d，则称 d 为纳什僵局)

继续回到定义：

多格纳什均衡：

在 $G=(I, S, \pi)$ 中，策略组合 $s^*=(s_1^*, \cdots, s_n^*)$ 称为 多格纳什均衡，若对每一个参与人 $i \in I$，有 $\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) > \pi_i(s_i, s_{-i}^*)$ 对所有的 $s_i \in S_i - \{s_i^*\}$ 成立.

上述定义给出了验证一个策略组合 s 是多格纳什均衡的方法. ("给定他人不体育，则体育一定是最佳")

以下考虑如何寻找多格纳什均衡.

若改变标准的条件，还在这个定义基础上，引入以下定义来进行.

对于参与人 i 而言，

若对 $\forall s \in S$，存在唯一的 $h \in S_i$，s.t.

$\pi_i(h, s_{-i}) > \pi_i(k, s_{-i})$ 对所有的 $k \in S_i - \{h\}$ 成立.

此时 h 为 s 的函数，称为参与人 i 的最优反应函数.

记为 $h = r_i(s)$. 称函数 $r_i(s)$, $s \in S$, 存在.

"假定其它参与人采用 s，则参与人一定采用 $r_i(s)$"

假设 $\forall i \in I$，函数 $r_i(s)$, $s \in S$, 存在.

因此，对 $\forall s \in S$，有 $r_i(s) \in S_i$

以及策略组合 $(r_1(s), r_2(s), \cdots, r_n(s)) \in S$

记 $r(s) = (r_1(s), r_2(s), \cdots, r_n(s)) \in S$

此时定义一个函数 $S \longrightarrow S$

$s \longmapsto r(s)$

称 $r(s)$ 为博弈 G 的最优反应函数.

可以证明：若 s^* 满足 $r(s^*) = s^*$，则

s^* 为博弈 G 的重复剔除的纳什均衡解.

[举例 回到例子上.

"1" \ "2"	1	2
1	-10, -10	0, -20
2	-20, 0	10, 10

画圈法
求函数法.

$$r_1(s) = \begin{cases} 1, & s = (1,1) \text{ 或 } (2,1) \\ 2, & s = (1,2) \text{ 或 } (2,2) \end{cases}$$

$$r_2(s) = \begin{cases} 1, & s = (1,1) \text{ 或 } (1,2) \\ 2, & s = (2,1) \text{ 或 } (2,2) \end{cases}$$

$$r(S)=(r_1(S),r_2(S))=\begin{cases}(1,1), & S=(1,1)\\ (2,1), & S=(1,2)\\ (1,2), & S=(2,1)\\ (2,2), & S=(2,2)\end{cases}$$

因此 $(1,1)$, $(2,2)$ 都是多格博弈的纯策略均衡，

因为 $r(1,1)=(1,1)$, $r(2,2)=(2,2)$.

继续看这个结论.

结论：若 s^* 满足 $r(s^*)=s^*$，则

s^* 为博弈 G 的多格博弈的纯策略均衡解.

类似上述这样的类似结论，称之为不动点定理.

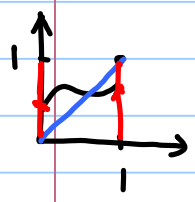
这个结论涉及到的函数 $r(S)$，是 $S\to S$ 上的.

微积分中最简单的不动点定理：

已知函数 $y=f(x)$ 是 $[0,1]\to[0,1]$ 上的.

如果 $y=f(x)$ 是连续函数，

则存在 $x^*\in[0,1]$，使得 $f(x^*)=x^*$.



实际上这说 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 一定有交点.

在这里，多格博弈纯策略均衡解存在的条件不一定得到满足.

(如下所述)

① 对于每个参与人 i 而言，

若对 $\forall s\in S$，存在唯一的 $h\in S_i$，s.t.

$\pi_i(h,s_{-i})>\pi_i(k,s_{-i})$ 对所有的 $k\in S_i-\{h\}$ 成立.

② 存在 s，使得 $r(s)=s$.

尽管如此，这个解存在条件已经比多格占优解放宽了.

放宽后，可以证明以下结论：

理性假设下的多标点纳解 是理性假设作为公共知识的多标点纳解，理性假设作为公共知识的多标点纳解是多标纳什均衡解.

如果多标纳什均衡解不存在，很自然的一种改变方式便是将"多标"限制词去除，即

纳什均衡的数学定义：

在 $G=(I, S, T)$ 中，策略组合 $S^*=(S_1^*, \cdots, S_n^*)$ 称为纳什均衡，若对每一个参与人 $i \in I$，有

$T_i(S_i^*, S_{-i}^*) \geq T_i(S_i, S_{-i}^*)$ 对所有的 $S_i \in S_i$ 成立.

也就是说，S_i^* 是给定其他参与人采用 S_{-i}^* 条件下，参与人 i 的其中一个最优策略.

同样验证是纳什均衡直接利用定义.

而多找纳什均衡的方法也是类似.

直观上也是画圈法或画线法，但数学角度描述则要复杂些.

7月11日

四. 纳什均衡解

纳什均衡的数学定义：

在 $G=(I, S, \pi)$ 中，策略组合 $s^*=(s_1^*, \cdots, s_n^*)$ 称为纳什均衡，若对每一个参与人 $i \in I$，有

$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}^*)$ 对所有的 $s_i \in S_i$ 成立。

也就是说，s_i^* 是给定其他参与人采用 s_{-i}^* 条件下，参与人 i 的 **最中** 一个最优策略。

同样 验证是纳什均衡直接利用定义。

而寻找纳什均衡的方法也是类似。

直观上也是画图法或画表法，但数学角度描述则要复杂些。

仍然从具体例子来看。

也是上节的例子。

		"2" 恨	"2" 爱
"1"	恨	-10, -10	0, -20
	爱	-20, 0	10, 10

纳什均衡

↑

(1,1), (2,2)

是否都纳什均衡？

$$\begin{cases} \pi_1(1,1) > \pi_1(2,1) \Leftrightarrow -10 > -20 \\ \pi_2(1,1) > \pi_2(1,2) \Leftrightarrow -10 > -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1(2,2) > \pi_1(1,2) \Leftrightarrow 10 > 0 \\ \pi_2(2,2) > \pi_2(2,1) \Leftrightarrow 10 > 0 \end{cases}$$

"一爱一恨不恨的感觉不如互爱下的感觉."

但某些人会认为一爱一恨不恨的感觉更好些。

甚至超过了互爱下的感觉，你如

"1" \ "2"	恨	爱
恨	-10, -10	20, -20
爱	-20, 20	10, 10

此时 (爱,爱) 不再是多特纳什均衡.

而 (恨,恨) 仍然是多特纳什均衡,

而且是理性假设下的多特占优解,

因为对每个人,"恨"多特占优"爱".

此时(恨,恨) 陷入囚徒困境.

两者的中间状态是以下情况:

(中间状态. 临界状态. 数学上的一种状态. 有了就算不是你? 又或者对我用以说本身不清楚?)

"1" \ "2"	恨	爱
恨	-10, -10	10, -20
爱	-20, 10	10, 10

同样 (恨,恨) 仍是多特纳什均衡解.

但不再是 多特占优解

(爱,爱) 不是多特纳什均衡解.

但它是纳什均衡解.

因为 $\pi_1(2,2) = \pi_1(1,2) \Rightarrow \pi_1(2,2) \geq \pi_1(1,2)$

$\pi_2(2,2) = \pi_2(2,1) \Rightarrow \pi_2(2,2) \geq \pi_2(2,1)$

现在来看画图优劣画线法.

"1" \ "2"	恨	爱
恨	-10, -10	10, -20
爱	-20, 10	10, 10

对于参与人1而言,

给定"2"采用"恨"

选择"恨"是最优的.

因此"-10"被画圈;

给定"2"采用"爱"

选择"爱"与"恨"是一样的,

都没有是最优的.

因此两个"10"都被画圈

因此,得到两个纳什均衡:

(恨,恨), (爱,爱).

现在再来看 数学角度的描述：

同样引入 n 个 定义.　　$\{1, 2, \cdots, m_i\}$

对于 参与人 i 而言，

若对 $\forall s \in S$，一定存在 $h \in S_i$（有限集） s.t.

$\pi_i(h, s_{-i}) \geq \pi_i(k, s_{-i})$ 对所有的 $k \in S_i$ 成立.

因此 集合

$\{h \in S_i : \pi_i(h, s_{-i}) \geq \pi_i(k, s_{-i})$ 对所有的 $k \in S_i$ 成立$\}$

不为空集，且是 S_i 的子集，记为 $\beta_i(s)$

称为 参与人 i 的最优反应"映射"，从 S 映射到 S_i.

对每一个 $s \in S$，可能有 S_i 中的多个元素与之对应.

$\beta_i(s)$：给定其他参与人按 s 进行博弈，参与人 i 的最优反应策略集合.

类似地，定义 G 的最优反应映射 β，从 S 映射到 S.

对 $\forall s \in S$，定义 $\beta(s) = \beta_1(s) \times \beta_2(s) \times \cdots \times \beta_n(s)$

$= \{(d_1, d_2, \cdots, d_n) : d_1 \in \beta_1(s), \cdots, d_n \in \beta_n(s)\}$

注记：若 $s^* \in \beta(s^*)$，则称 s^* 为 G 的纳什均衡.

仍旧看例子：

"1" \ "2"	1	2
1	-10, -10	10, -20
2	-20, 10	10, 10

画圈法
求画线法.

$\beta_1(s) = \begin{cases} \{1\}, & s=(1,1) \text{ 或 } (2,1) \\ \{1,2\}, & s=(1,2) \text{ 或 } (2,2) \end{cases}$

$\beta_2(s) = \begin{cases} \{1\}, & s=(1,1) \text{ 或 } (1,2) \\ \{1,2\}, & s=(2,1) \text{ 或 } (2,2) \end{cases}$

$$\bar{\beta}(s)=\bar{\beta}_1(s)\times\bar{\beta}_2(s)=\begin{cases}\{1\}\times\{1\}=\{(1,1)\}, & s=(1,1)\\ \{1,2\}\times\{1\}=\{(1,1),(2,1)\}, & s=(1,2)\\ \{1\}\times\{1,2\}=\{(1,1),(1,2)\}, & s=(2,1)\\ \{1,2\}\times\{1,2\}=S, & s=(2,2)\end{cases}$$

(1,1), (2,2) 是 [内什的侯], 因为

$(1,1)\in\bar{\beta}(1,1)$, $(2,2)\in\bar{\beta}(2,2)$.

尽管如此, (2,2) 仍然存在差异.

这里构造了一个集合 G 的看似反演映射 $\bar{\beta}$,

从 S 映射到 S. 只是不再是一对一映射.

如果存在 $s\in S$, 使得 $s\in\bar{\beta}(s)$.

则 s 为 [内什的侯].

上节课提到, 数学上 [内什的侯] 又称为不动点.

数学的角度常常研究不动点存在的条件.

上节提到一个最简单情形的不动点定理

"已知 函数 $y=f(x)$ 是 $[0,1]\longrightarrow[0,1]$ 上的.

如果 $y=f(x)$ 是连续函数,

则 存在 $x^*\in[0,1]$, 使得 $f(x^*)=x^*$. "

不动点存在的条件非常简单, 只要连续即可!

这一节我们提到了 不满足一对一的映射.

不再是我们熟悉的函数, 而这种映射也含有

类似"连续"的定义. 或者说 我们有可能据此

引出完全与微积分不同的数学问题.

从下例子想说明: 如何从实际问题引出"新"

的数学问题? 步骤地说, 这才是真正意义上

的"应用数学研究"!

附注: "新" 只是相对微积分而言.

例：卖水问题.

假设有两人在一段狭长的沙滩住上卖水.

又假设这段沙滩住的人群分布是均匀的，并且他们选择到离他们近的卖水点买水.

数学化：①参与人集合 $I=\{1,2\}$ 代表这两个卖水人.

② 现在用区间 $[0,1]$ 代表这段沙滩住，

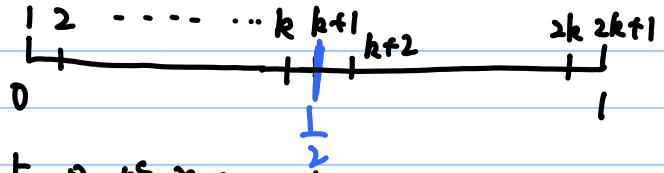
参与人 i ($i=1,2$) 的策略集

$S_i=[0,1]=\{x \mid x\in[0,1]\}$，其中 x 代表参与人 i 的选择卖水的地点.

$S=S_1\times S_2=[0,1]\times[0,1]=[0,1]^2$

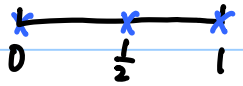
③ 假设一：

这段沙滩住有 $2k+1$ 个人，分布情况如下



等分成 $2k$ 个区间

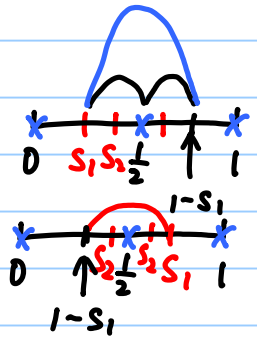
先考虑最简单的，$k=1$. 即



则参与人的划用用潜在客户数表示，

当 $(s_1,s_2)\in\{(s_1,s_2)\mid 0\le s_1<\frac{1}{2},\ s_1<s_2<1-s_1\}$

$\cup\{(s_1,s_2)\mid s_1>\frac{1}{2},\ 1-s_1<s_2<s_1\}$ 时，



$\pi_1(s_1,s_2)=1$，$\pi_2(s_1,s_2)=2$

当 $(s_1,s_2)\in\{(s_1,s_2)\mid 0\le s_1<\frac{1}{2},\ s_2<s_1$ 或 $s_2>1-s_1\}$

$\cup\{(s_1,s_2)\mid s_1>\frac{1}{2},\ s_2<1-s_1$ 或 $s_2>s_1\}$

$\cup\{(s_1,s_2)\mid s_1=\frac{1}{2},\ s_2\neq\frac{1}{2}\}$

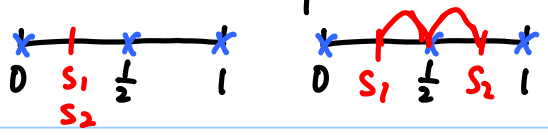
$\pi_1(s_1,s_2)=2$，$\pi_2(s_1,s_2)=1$

当 $(s_1, s_2) \in \{(s_1, s_2) \mid s_2 = 1 - s_1 \text{ 或 } s_2 = s_1\}$

$\pi_1(s_1, s_2) = \frac{3}{2}$

$\pi_2(s_1, s_2) = \frac{3}{2}$

△



现在要求 (1) 给定 $s_2 \in S_2 = [0,1]$，求 $s_1 \in S_1 = [0,1]$

使得 $\pi_1(s_1, s_2)$ 最大化.

以及 (2) 给定 $s_1 \in S_1 = [0,1]$，求 $s_2 \in S_2 = [0,1]$

使得 $\pi_2(s_1, s_2)$ 最大化.

相比之前用函数表示形式，"问题 (2)" 更容易求.

(i) 当给定 $s_1 \in [0, \frac{1}{2})$ 时，此时只要 $s_2 \in (s_1, 1-s_1)$

$\pi_2(s_1, s_2) = 2$ 取得最大值. 因此最大值点不只一个，

落在 $(s_1, 1-s_1)$ 区间的都是；

(ii) 给定 $s_1 \in (\frac{1}{2}, 1]$ 时，此时只要 $s_2 \in (1-s_1, s_1)$

$\pi_2(s_1, s_2) = 2$ 取得最大值. 因此最大值点不只一个，

落在 $(1-s_1, s_1)$ 区间的都是；

(iii) 给定 $s_1 = \frac{1}{2}$ 时，此时只有 $s_2 = \frac{1}{2}$ 时，

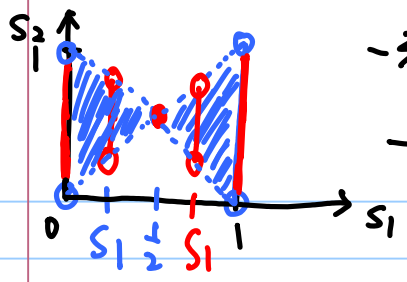
$\pi_2(s_1, s_2) = \frac{3}{2}$ 取得最大值.

类似地，构造一个映射，从 $S_1 \to S_2$ 的映射.

$$S_1 \longrightarrow S_2$$
$$s_1 \longmapsto \alpha_2(s_1)$$

表示：给定 $s_1 \in S_1$，$\alpha_2(s_1)$ 是使得 $\pi_2(s_1, s_2)$ 取得最大值的所有 s_2 的集合.

因此，有 $\alpha_2(s_1) = \begin{cases} (s_1, 1-s_1), & s_1 \in [0, \frac{1}{2}) \\ (1-s_1, s_1), & s_1 \in (\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{1}{2}, & s_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$



一元映射的图形是个区域.

一元函数的图形只是一条曲线.

参与人1的问题与参与人2的问题是对称的.

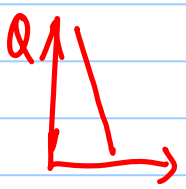
类似可得 $S_2 \to S_1$ 上的映射

$$s_2 \longmapsto d_1(s_2)$$

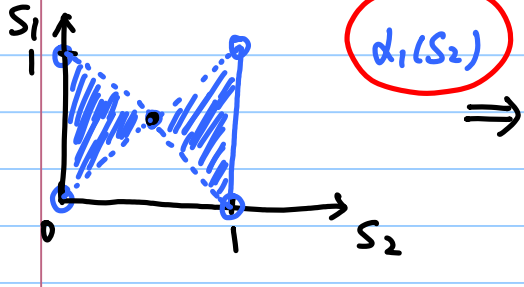
$Q = f(P)$

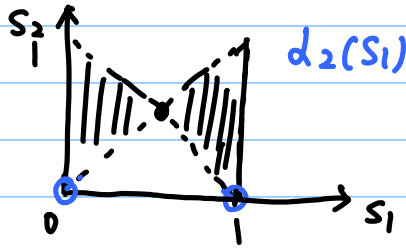
已知 待求

$$d_1(s_2) = \begin{cases} (s_2, 1-s_2), & s_2 \in [0, \frac{1}{2}) \\ (1-s_2, s_2), & s_2 \in (\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{1}{2}, & s_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

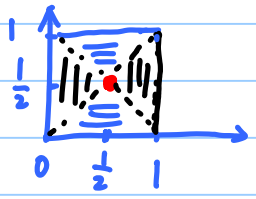


$P = f^{-1}(Q)$





↓ 这两个图形的交点只有一个



因此，只有唯一的1纳什均衡 $s^* = (s_1^*, s_2^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

因为只有唯一的这一个点，使得当 $s_1 = s_1^*$，$s_2^* \in d_2(s_1^*)$；

当 $s_2 = s_2^*$，$s_1^* \in d_1(s_2^*)$.

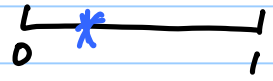
7月15日

回. 纳什均衡解

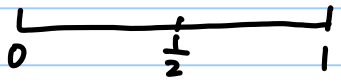
上节例子的回顾：

卖水问题：① $I=\{1,2\}$

② $S_1=S_2=[0,1]$



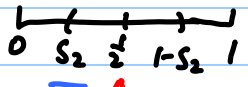
假设有三个(或者说三群)顾客. 利分布在 $0,\frac{1}{2},1$ 三个点上.



我们定义 最优反应映射.

给定参与人2 采用 s_2，则参与人1 采用最优反应映射 $\alpha_1(s_2)$ 中的一个策略.

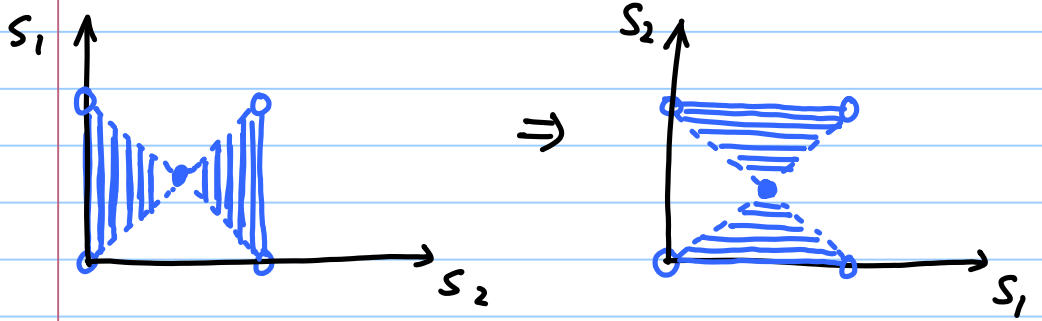
$$\alpha_1(s_2)=\begin{cases}(s_2,1-s_2), & 0\le s_2<\frac{1}{2}\\ \{\frac{1}{2}\}, & s_2=\frac{1}{2}\\ (1-s_2,s_2), & \frac{1}{2}<s_2\le 1\end{cases}$$



$= \Delta$

这个映射也可以直接从直观角度学到.

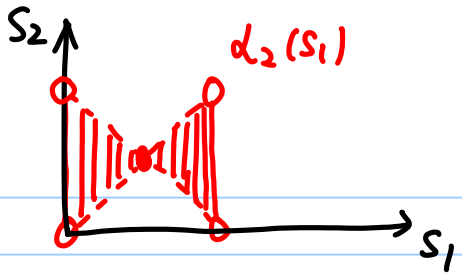
假设一个问题——两个中间顾客.

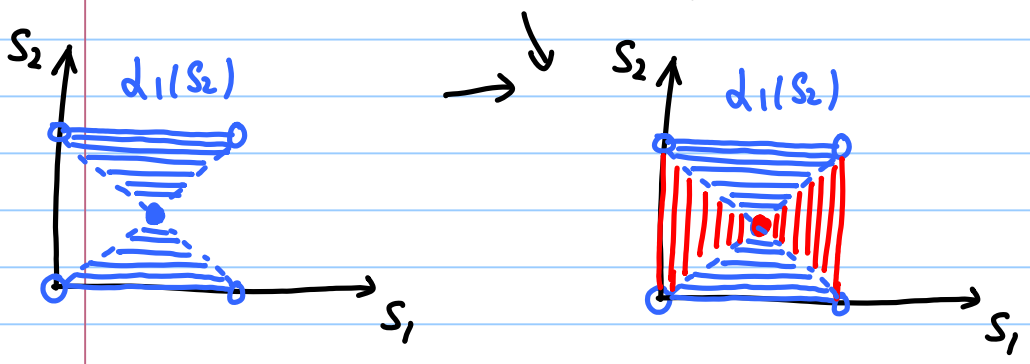


类似地，

给定参与人1 采用 s_1，则参与人2 采用最优反应映射 $\alpha_2(s_1)$ 中的一个策略.

$$\alpha_2(s_1)=\begin{cases}(s_1,1-s_1), & 0\le s_1<\frac{1}{2}\\ \{\frac{1}{2}\}, & s_1=\frac{1}{2}\\ (1-s_1,s_1), & \frac{1}{2}<s_1\le 1\end{cases}$$





两个映射在同一张图中只有唯一一个交点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

这个交点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 即为1的什么时候了.

从一般问题角度: 已知最优反应映射 $d_1(S_2), d_2(S_1)$

若 (S_1^*, S_2^*) 为这两个映射的交点,

也即 $S_1^* \in d_1(S_2^*)$, $S_2^* \in d_2(S_1^*)$.

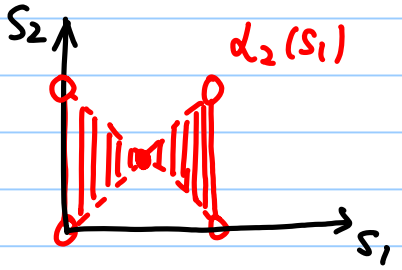
直观语言: 给定参与人2采用 S_2^*, S_1^* 是参与人1的一个最优策略;

给定参与人1采用 S_1^*, S_2^* 是参与人2的一个最优策略. 因此 (S_1^*, S_2^*) 是1的什么时候了.

此时, 有1的什么时候1解.

数学层面上 是因为 $S_1 \to S_2$ $S_1 \mapsto d_2(S_1)$ 与 $S_2 \to S_1$ $S_2 \mapsto d_1(S_2)$

这两个映射具有某种"连续"性. 因此有1的什么时候1解.



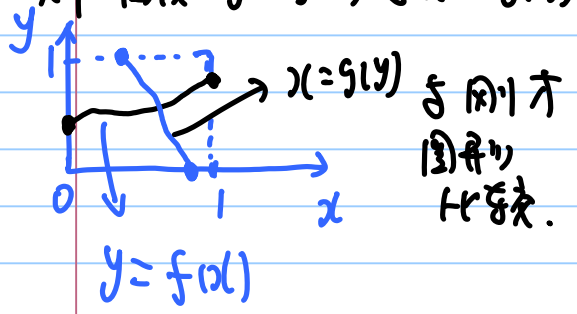
思考: 这种"连续"要如何定义?

与之对应的微积分问题如下：

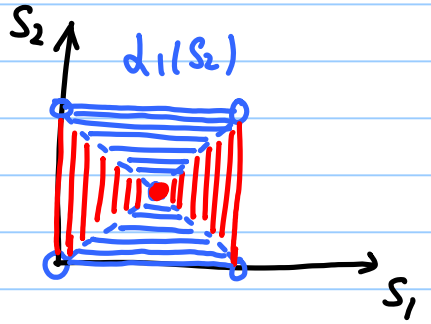
假设 $y=f(x)$ 是 $[0,1]\to[0,1]$ 上的连续函数.

$x=g(y)$ 是 $[0,1]\to[0,1]$ 上的连续函数.

则 曲线 $y=f(x)$ 与 $x=g(y)$ 有交点.



与刚才图形比较.



小论文的一些主题（数学化）

① 映射的连续性要如何定义？

② 2k+1个顾客，k=1. 更大的k的考虑，结果会改变吗？

③ 2k个顾客的问题，结果会改变吗？

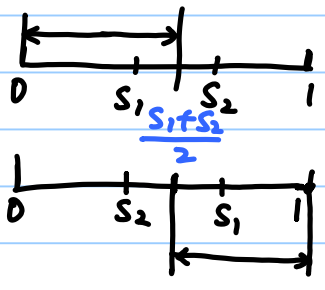
从上述人顾客数角度考虑，还离散的角度.

也可以从连续的角度. 假设顾客非常多. (注意不一定要求同时都在沙漠住，可以不同时间)

干旱救用买数直接用区间长度表示. 表示处在该区间的顾客都到这个等人处买水. 这个等人的利用即为该区间长度. 因此假设：

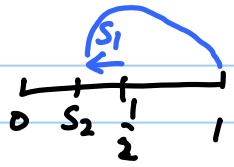
等人1的利用函数 $\tau_1:\mathcal{S}\to[0,1]$ 定义为

$$\tau_1(s_1,s_2)=\begin{cases}\dfrac{s_1+s_2}{2}, & s_1<s_2\\ 1-\dfrac{s_1+s_2}{2}, & s_1>s_2\\ \dfrac{1}{2}, & s_1=s_2\end{cases}$$



$$\tau_2(s_1,s_2)=1-\tau_1(s_1,s_2).$$

类似地，可求 $S_2 \to S_1$，即给定 $s_2 \in S_2$，求有哪些 s_1 使得 $r_1(s_1, s_2)$ 最大化？



$S_2 \to \alpha_1(s_2)$

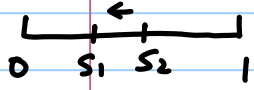
从而 $\alpha_1(s_2) = \begin{cases} \emptyset, & s_2 \neq \frac{1}{2} \\ \{\frac{1}{2}\}, & s_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

类似 $\alpha_2(s_1) = \begin{cases} \emptyset, & s_1 \neq \frac{1}{2} \\ \{\frac{1}{2}\}, & s_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

这两者的图都仅包含一个点 $s = (s_1, s_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

即为纳什均衡。 **与之前的情景相同！**

另外，直观语言的证法在本例中可以得到应用。



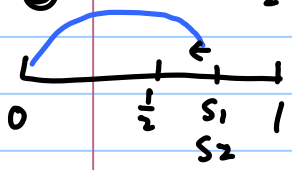
设 $s = (s_1, s_2) \in$ "$S = [0,1] \times [0,1]$"

① 若 $s_1 < s_2$，则 s 不是纳什均衡。

因为给定参与人 1 采用 s_1，参与人 2 偏离 s_2，可以带来更大的收益，例如参与人 2 可以更靠近 s_1，获得更多的预备。

② 若 $s_1 > s_2$，同样有 s 不是纳什均衡。

③ 若 $s_1 = s_2 > \frac{1}{2}$，则 s 也不是纳什均衡。



因为给定参与人 1 采用 s_1，参与人 2 可以按照不大于纳什均衡 s_2 可以获得更多的预备。

④ 若 $s_1 = s_2 < \frac{1}{2}$，则 s 也不是纳什均衡。

⑤ 只有 $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$，s 是纳什均衡。

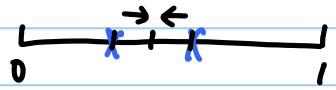
也即给定对方处在中点位置，偏离中点只会预备更少。

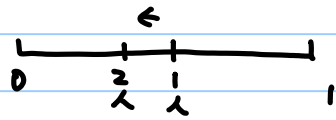
这个模型的意义：中间派比左派、右派更受欢迎！

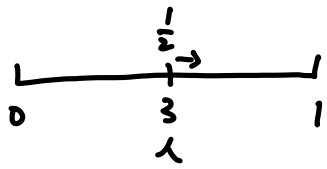
现在要站在参与人角度

三个参与人的情况：不存在纳什均衡。

分析类似







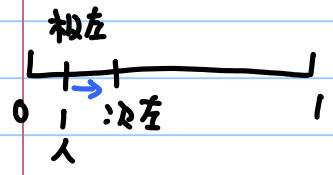
1的什么级|见一种稳定解. 三人关系还是不稳定的!

"一个和为热水喝,两个和为开水喝,三个和为温水喝"

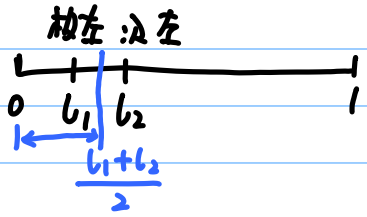
更多 n 人情况: $I=\{1,2,\cdots,n\}$, $n\geq 4$

能够证明:"一定存在1的什么级解"

极左派至少有2人, 极右派同样至少有2人

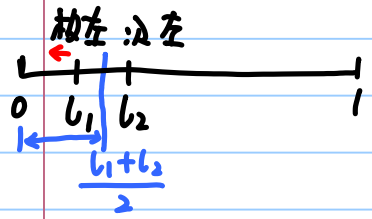


极左派与次左派的关系:



假设极左派 l_1 有 k 人, $k\geq 2$.

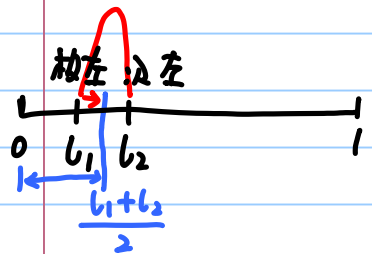
如果是1的什么级,需满足偏离不会提升利益.



$$\frac{l_1+l_2}{2}\cdot\frac{1}{k}\geq l_1$$

$$\Rightarrow l_1+l_2\geq 2kl_1$$

$$\Rightarrow l_2\geq(2k-1)l_1$$



$$\frac{l_1+l_2}{2}\cdot\frac{1}{k}\geq\frac{l_2-l_1}{2}$$

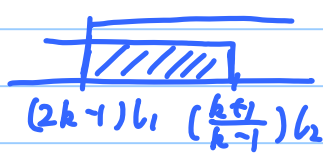
$$\Rightarrow l_1+l_2\geq k(l_2-l_1)$$

$$\Rightarrow l_2\leq\frac{k+1}{k-1}l_1$$

因此有 $l_2\geq(2k-1)l_1$ 以及 $l_2\leq\frac{k+1}{k-1}l_1$ 同时成立.

此时须满足 $2k-1\leq\frac{k+1}{k-1}=1+\frac{2}{k-1}$

而当 $k\geq 3$ 时, $2k-1\geq 5$



$1+\frac{2}{k-1} \le 2$

不可能满足 $2k-1 \le \frac{k+1}{k-1}$.

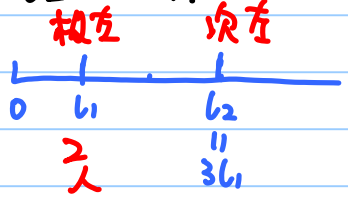
因此 k 只能取 $k=2$.

"极左派有且仅有2人，极右派有且仅有2人".

$k=2$ 代入到 $l_2 \ge (2k-1)l_1$ 以及 $l_2 \le \frac{k+1}{k-1} l_1$ 中

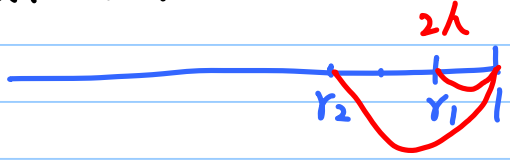
有 $l_2 \ge 3l_1$ 以及 $l_2 \le 3l_1$ 同时成立.

因此 "$l_2 = 3l_1$."



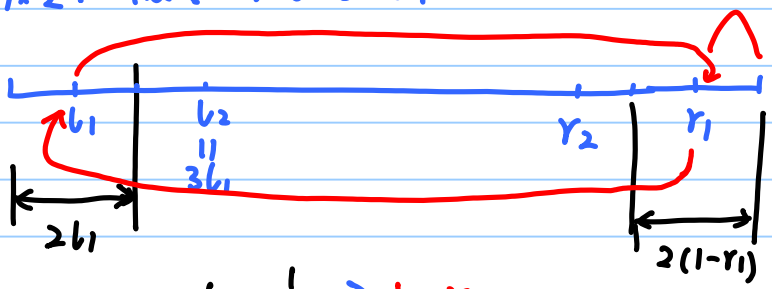
极左派选定位置. 次左派的位置由极左派位置决定.

类似. 极右派与次右派也有类似情况



满足 "$1-r_2 = 3(1-r_1)$"

极左. 极右同时考虑:

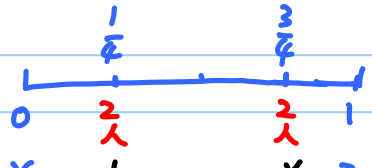


$$\begin{cases} 2l_1 \cdot \frac{1}{2} \ge 1-r_1 \\ 2(1-r_1)\cdot\frac{1}{2} \ge l_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_1 \ge 1-r_1 \\ l_1 \le 1-r_1 \end{cases} \Rightarrow l_1 = 1-r_1$$

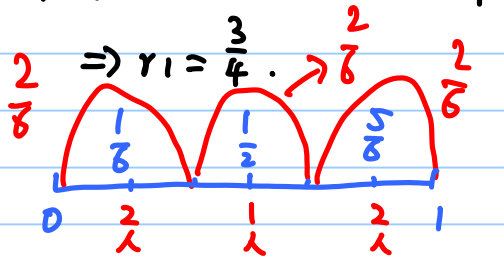
因此: 极左与极右是对称的.

四个参与人的情况:



极左.次左关系： $l_2 = 3l_1 \Rightarrow r_1 = 3l_1$

极左.极右关系： $l_1 = 1 - r_1 \Rightarrow l_1 = 1 - 3l_1 \Rightarrow l_1 = \frac{1}{4}$



五个等级的情况：

极左.次左： $l_2 = 3l_1$

极右.次右： $1 - r_2 = 3(1 - r_1)$

$\Rightarrow 1 - l_2 = 3(1 - r_1)$

极左.极右： $l_1 = 1 - r_1$

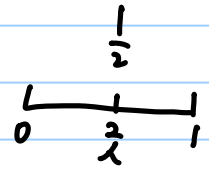
$\Rightarrow l_1 = \frac{1}{6}$, $l_2 = \frac{1}{2}$,

$r_1 = \frac{5}{6}$

7月18日

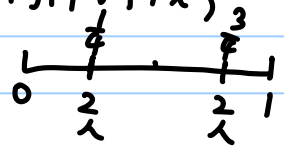
四. 纳什均衡解.

卖水问题: ① 两个参与人时

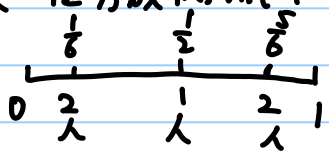


② 三个参与人时. 不存在纳什均衡了

③ 四个参与人时, 两人一组分成两派:



④ 五个参与人时:



⑤ 六个及六个以上参与人: 纳什均衡存在且不唯一.

并且能证明: 中间派最多有2人.

因此: 均衡时, 同一地点最多有2人.

又再次说明从、2人关小的稳定. 3人我要当人关小的不稳定.

五. 混合策略

继续举例什么情况下, 上述定义的纳什均衡解不存在, 然后又要如何继续推广解的定义?

例子: 零和博弈: 即一方的收益是另一方的损失.

1 \ 2	1	2
1	(1,-1)	(-1,1)
2	(-1,1)	(1,-1)

两次试验

守门员 \ 罚球员	左	右
左	(1,-1)	(-1,1)
右	(-1,1)	(1,-1)

不存在纳什均衡.

此时推广解的方法与之前完全不同.

在这个问题上, 如果策略被对方知道, 一定会输.

然而纳什均衡解在知道后, 给定一方的策略不变,

另一方的策略也不变. 现在对于解的方法，还要让对方无法猜到你的策略. 对方又能估计你出策略 1 的概率有多大？

例如，守门员根据踢球员以往的踢球记录判断踢球员有 $\frac{2}{3}$ 向左踢，有 $\frac{1}{3}$ 向右踢.

或者说，守门员认为：给定踢球员采用的策略是."$\frac{2}{3}$ 向左踢，$\frac{1}{3}$ 向右踢."，此时守门员该怎么办？

此时的策略称为混合策略，而将从前所说的策略称为纯策略.

一般混合策略的定义：已知参与人 i 的纯策略集合为 $S_i = \{1, 2, \cdots, m_i\}$（有限集）

若 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im_i})$ 满足

① $x_{ih} \geq 0, \forall h \in S_i$　② $\sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} = 1$

则称 x_i 为参与人 i 的混合策略.

实际上 x_i 是定义在 S_i 上的离散概率分布.

给定参与人 i 采用 x_i，表示以概率 x_{ih} 采用纯策略 h，$\forall h \in S_i$.　$x_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

一种解释：是让对方觉得你采用的是混合策略.

参与人 i 的混合策略空间

$$\Delta_i = \left\{ x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im_i}) \mid x_{ih} \geq 0, \forall h \in S_i; \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} = 1 \right\}$$

博弈 G 的混合策略空间

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \times \Delta_n$$

参与人 i 的期望效用函数定义为. $S=(S_1,\cdots,S_n)$

$$u_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{s\in S}\underbrace{x_{1s_1}x_{2s_2}\cdots x_{ns_n}}_{s\text{实现的概率}}\underbrace{\pi_i(s_1,s_2,\cdots,s_n)}_{s\text{实现时}\atop\text{参与人}i\text{的效用}}$$

博弈 G 的期望效用函数

$u(x)=(u_1(x),\cdots,u_n(x))$

最终 G 扩展为 $\tilde{G}=(I,\Delta,u)$

回到例子上：

守门员 \ 罚球员	r 左	$1-r$ 右
q 左	$(1,-1)$	$(-1,1)$
$1-q$ 右	$(-1,1)$	$(1,-1)$

设守门员的混合策略

$x_1=(x_{11},x_{12})$

$\triangleq(q,1-q)$, $q\in[0,1]$

$x_2=(x_{21},x_{22})$

$\triangleq(r,1-r)$, $r\in[0,1]$

守门员的期望效用

$$u_1(x_1,x_2)=q\cdot r\cdot\pi_1(1,1)+q\cdot(1-r)\cdot\pi_1(1,2)+(1-q)\cdot r\cdot\pi_1(2,1)+(1-q)\cdot(1-r)\cdot\pi_1(2,2)$$

(隐含假设：两人的随机化方式独立！)

$$=qr\cdot 1+q(1-r)\cdot(-1)+(1-q)r\cdot(-1)+(1-q)(1-r)\cdot 1$$

$$=(1-2r)+(4r-2)q$$

守门员 \ 罚球员	r 左	$1-r$ 右
q 左	$(1,-1)$	$(-1,1)$
$1-q$ 右	$(-1,1)$	$(1,-1)$

罚球员的期望效用

$u_2(x_1,x_2)=qr\cdot(-1)+q(1-r)\cdot 1+(1-q)r\cdot 1+(1-q)(1-r)\cdot(-1)$

$=(2q-1)+(2-4q)r$

即 $u_1(x_1,x_2)=(1-2r)+(4r-2)q$

$u_2(x_1,x_2)=(2q-1)+(2-4q)r$

$x_1=(q,1-q)$, $x_2=(r,1-r)$

混合策略纳什均衡定义为其与纯策略纳什均衡

完全类似，自然语言角度完全一样：

某个策略组合是什么的话，若给定其他参与人不偏离该策略组合，则该参与人也不偏离。

在两人问题上，(x_1^*, x_2^*) 是什么的话，若 x_1^* 是 $u_1(x_1, x_2^*)$ 的最大值点之一，x_2^* 是 $u_2(x_1^*, x_2)$ 的最大值点之一。

寻找什么对象。一样的是定义每个参与人的最优反应映射。

在"2×2"中来，即 $I=\{1,2\}$，$S_1=S_2=\{1,2\}$ 一样可以定义具体问题的最优反应映射。

（与三个预警时2个卖水人问题类似）。

此时，$x_1=(q, 1-q)$，$x_2=(r, 1-r)$

自然 q 决定了 x_1，r 决定了 x_2

因此说，"给定参与人1的混合策略 $x_1=(q, 1-q)$，现在考虑参与人2的最优混合策略 $x_2=(r, 1-r)$"

相当于"给定参与人1的 q，要求使参与人2的期望收用最大的 r"，由于最大值点 r 不一定唯一，因此此时需定义最优反应映射 $\alpha_2(q)$。

也即给定 q，集合 $\alpha_2(q)$ 中的 r 使得 u_2 最大。

继续回到两人对抗博弈，

此时 $u_1(x_1, x_2)=(1-2r)+(4r-2)q$

$u_2(x_1, x_2)=(2q-1)+(2-4q)r$

考虑参与人2的最优反应映射 $\alpha_2(q)$：

给定 q，集合 $\alpha_2(q)$ 中的 r 使得 u_2 最大.

此时与之前类似同理类似，也是在 q 的不同给定范围来考虑：① 当 $2-4q>0$ 时，即 $q<\frac{1}{2}$ 时.

u_2 是 r 的递增函数，$r\in[0,1]$. 因此 $r=1$ 使得 u_2 最大.

$u_2(x_1,x_2)=(2q-1)+(2-4q)r$

② 当 $2-4q<0$ 时，即 $q>\frac{1}{2}$ 时，

u_2 是 r 的递减函数，$r\in[0,1]$，因此 $r=0$ 使得 u_2 最大.

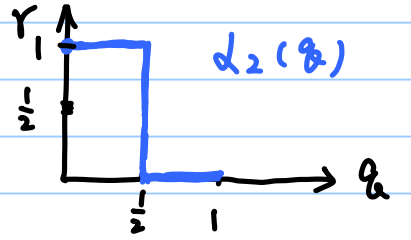
③ 当 $2-4q=0$ 时，即 $q=\frac{1}{2}$ 时，

$u_2\equiv 0$，与 r 无关. 又或者说，$r\in[0,1]$ 都是使得 u_2 最大的点.

因此，参与人 2 的最优反应映射为

$$\alpha_2(q)=\begin{cases}\{1\}, & q<\frac{1}{2}\\ [0,1], & q=\frac{1}{2}\\ \{0\}, & q>\frac{1}{2}\end{cases}$$

此时 最优反应映射 图形如下：



一条曲线

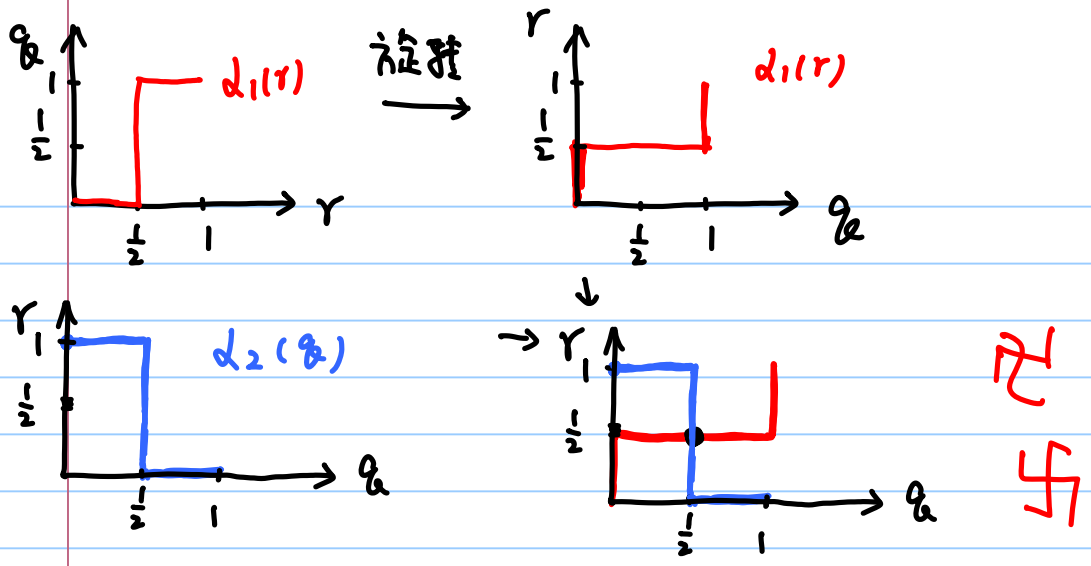
不是连续曲线.

参与人 1 的最优反应映射 $\alpha_1(r)$ 也是类似

从 $\max_q u_1(x_1,x_2)=(1-2r)+(4r-2)q$

得到：

$$\alpha_1(r)=\begin{cases}\{0\}, & r<\frac{1}{2}\\ [0,1], & r=\frac{1}{2}\\ \{1\} & r>\frac{1}{2}\end{cases}$$



得到唯一的交点 $r=\frac{1}{2}$，$q_2=\frac{1}{2}$，为唯一的纳什均衡，

即 $x_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$x_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 构成纳什均衡。

意味着 守门员以 $\frac{1}{2}$ 概率向左扑，$\frac{1}{2}$ 概率向右扑

又或者说 守门员在让 罚球员相信自己是

以 $\frac{1}{2}$ 概率向左扑，$\frac{1}{2}$ 概率向右扑.

对罚球员也是如此. 这个纳什均衡从直观角度

可以想象确实是合理的.

总结"2×2"博弈的基本方法：

$I=\{1,2\}$，$S_1=S_2=\{1,2\}$

$x_1=(q_2,1-q_2)$，$x_2=(r,1-r)$

$0\le q_2\le 1$，$0\le r\le 1$

"1" \ "2"	r	$1-r$
	1	2
q_2 1		
$1-q_2$ 2		

$$u_1(x_1,x_2)=q_2\cdot r\cdot\pi_1(1,1)+q_2\cdot(1-r)\cdot\pi_1(1,2)$$
$$+(1-q_2)\cdot r\cdot\pi_1(2,1)+(1-q_2)\cdot(1-r)\cdot\pi_1(2,2)$$

$$=[\pi_1(2,2)+(\pi_1(2,1)-\pi_1(2,2))r]$$
$$+[(\pi_1(1,1)-\pi_1(1,2)-\pi_1(2,1)+\pi_1(2,2))r$$
$$+\pi_1(1,2)-\pi_1(2,2)]\cdot q_2$$

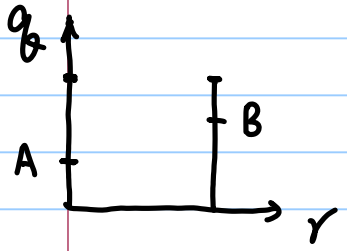
这个映射只能以下情况中的一种：

q 的递增函数，递减函数，或者是常数函数.

根据 q 的系数是 >0，<0 或者 $=0$ 而定.

于是 给定 γ，多对人工的最优支配映射 $\alpha_1(\gamma)$

能证明出 具有某种"连续"性.



这个映射 与之前卖冰问题

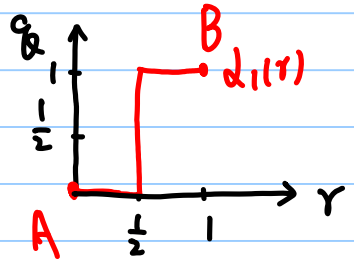
比较起来会简单得多，

因为图形上表现为一条曲线.

这里的连续性就是指 A.B 的连线不间断.

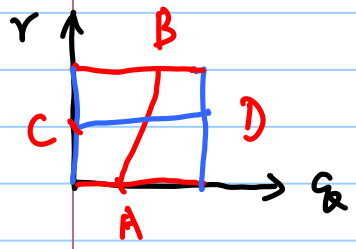
只是这里的连线不必是 直线 曲线.

例如：



数学上能够证明 $\alpha_1(\gamma)$ 具有这样的连续性.

于是 问题 就化为 从下图形 问起.



卖冰问题已经 起到这样的

问题. 一样能证明一定有参数

结论：2×2 博弈一定存在 混合策略下的纳什均衡.

继续看一个例子：性别博弈

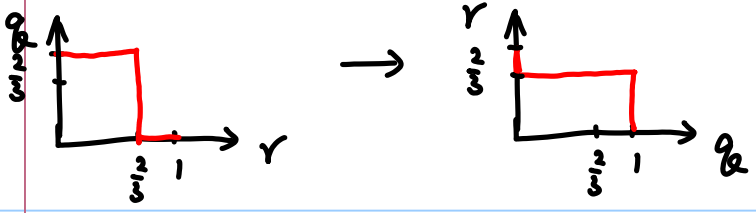
女 \ 男	看球 γ	购物 $1-\gamma$
购物 q	(0,0)	(2,1)
看球 $1-q$	(1,2)	(0,0)

$S_1 = \{1, 2\}$

$S_2 = \{1, 2\}$

$$u_1(x_1, x_2) = (1-q)\cdot\gamma\cdot 1 + q\cdot(1-\gamma)\cdot 2$$
$$= \gamma + (2-3\gamma)q$$

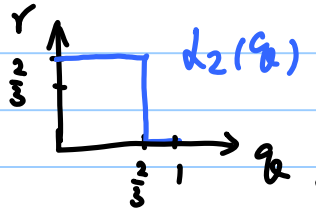
$$\alpha_1(\gamma) = \begin{cases} \{1\} & \gamma < \frac{2}{3} \\ [0,1] & \gamma = \frac{2}{3} \\ \{0\} & \gamma > \frac{2}{3} \end{cases}$$



女 \ 男	r 看球	$1-r$ 购物
$q_女$ 购物	(0,0)	(2,1)
$1-q_女$ 看球	(1,2)	(0,0)

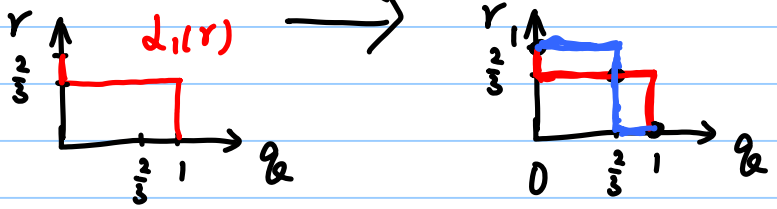
$$u_2(x_1,x_2) = (1-q_女)\cdot r\cdot 2 + q_女\cdot(1-r)\cdot 1 = q_女 + (2-3q_女)r$$

$$d_2(q_女)=\begin{cases}\{1\}, & q_女<\frac{2}{3}\\ [0,1], & q_女=\frac{2}{3}\\ \{0\}, & q_女>\frac{2}{3}\end{cases}$$



与 $d_1(r)$ 完全类似

这已是当仔这里特男对策略作如此顺方向画的图之一.



有三个交点, ① $q_女=0$, $r=1$

② $q_女=1$, $r=0$

③ $q_女=\frac{2}{3}$, $r=\frac{2}{3}$

其中第①, ②个交点, 实际上是1号策略不加1内什么的候1, 即 (看球, 看球), (购物, 购物).

女 \ 男	r 看球	$1-r$ 购物
$q_女$ 购物	(0,0)	(2,1)
$1-q_女$ 看球	(1,2)	(0,0)

而第③个交点是指:

女方以 $\frac{2}{3}$ 概率买购物

$\frac{1}{3}$ 概率买看球;

男方以 $\frac{2}{3}$ 概率买看球,

$\frac{1}{3}$ 概率买购物.

比较这三个1内什么候1.

(看球, 看球): 男方效用为 2, 女方效用为 1

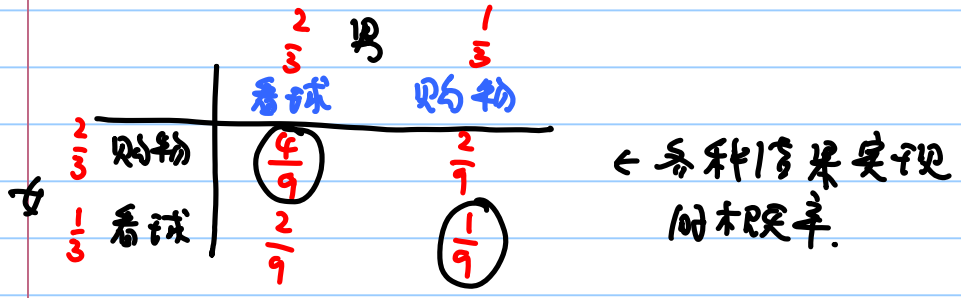
(购物, 购物): 男方效用为 1, 女方效用为 2

第四个交点：男、女双方利用均为 $\frac{2}{3}$.

前两者：有利率，但不平等

第三个：平等，但无利率

必须说明的是第三个看似平等，但有些不可理喻



由这个问题引发了一种混合策略纳什均衡解的概念了 —— 相关均衡解！

它是对之前一个隐含假设

"两人的随机化方式彼此独立！"

进行修正，也即不再独立. 对等角度重得复杂.

这里不多赘叙述. 只是阐述其结论：

混合策略纳什均衡解的凸组合均为相关均衡解.

在这个例子上，得到了三个解. 现在只看前两个解，

前两个解的"凸组合"是相关均衡解.

例如：以 $\frac{1}{2}$ 概率实现（看球，看球），

以 $\frac{1}{2}$ 概率实现（购物，购物）.

具体实现方法可以很简单：

两人可以抛硬币决定，如果正面向上，则一起去购物.

如果反面向上，则一起去看球.

这个特殊的相关均衡解既实现了平等

（即双方利用均为 $\frac{3}{2}$），也是有利率的.

这个例子有助于看待现实的性别平等问题

女 \ 男	看球	购物
购物	(0,0)	(2,1)
看球	(1,2)	(0,0)

变换叙述

女 \ 男	主导	从属
主导	(0,0)	(2,1)
从属	(1,2)	(0,0)

有权力的社会：① (主导，从属)：母系社会

② (从属，主导)：父系社会

③ 主权关系实现 (主导，从属)，

主权关系实现 (从属，主导)。 性别平等社会。

在现在的社会该如何去改变性别不平等现状？

道德：男方占主导，女方占从属

法律：女方占主导，男方占从属

7月22日

五. 混合策略.

"2×2"博弈: $I=\{1,2\}$, $S_1=S_2=\{1,2\}$.

支付用实数用表格表示

例如 (1) 面议博弈

		守门员 左	守门员 右
罚球员	左	(1,-1)	(-1,1)
罚球员	右	(-1,1)	(1,-1)

(2) 性别博弈

		女 主导	女 从属
男	主导	(0,0)	(2,1)
男	从属	(1,2)	(0,0)

引入混合策略. 参与人1的混合策略 $x_1=(q,1-q)$

$x_1\in\Delta_1=\{(q,1-q)\mid 0\le q\le 1\}$

由于 q 决定了 x_1, 此时参与人1的混合策略实际上是选择 $q\in\tilde{S}_1=[0,1]$

即: 此时混合策略可以看成是建立在策略集 $\tilde{S}_1=[0,1]$ 上的纯策略.

同样地, 参与人2的混合策略 $x_2=(r,1-r)\in\Delta_2$,

(其中 $\Delta_2=\{(r,1-r)\mid 0\le r\le 1\}$)

等价于选择 $r\in\tilde{S}_2=[0,1]$.

	r	1-r
q	1	2
1-q	2	

参与人1的期望效用函数为

$$u_1(x_1,x_2)=qr\,\pi_1(1,1)+q(1-r)\pi_1(1,2)+(1-q)r\,\pi_1(2,1)+(1-q)(1-r)\pi_1(2,2)$$

同样看成是 q,r 的二元函数 $\tilde{\pi}_1(q,r)$.

类似地, 参与人2的期望效用函数为

$$u_2(x_1,x_2)\triangleq\tilde{\pi}_2(q,r)$$

因此, 相当于考虑如下2人博弈: (纯策略)

① $I=\{1,2\}$

② $\tilde{S}_1=\tilde{S}_2=[0,1]$

③ $\tilde{\pi}_1(q,r)$, $\tilde{\pi}_2(q,r)$, 其中 $q\in\tilde{S}_1$, $r\in\tilde{S}_2$.

在这个特殊2人博弈中 $\tilde{S}_1(q,r)$, $\tilde{S}_2(q,r)$ 分别是 q 的一元函数和 r 的一元函数，它使得如下两个最优反应映射 $\alpha_1(r)$, $\alpha_2(q)$ 具有"连续"性

从而有交点(纳什均衡点)，因此纳什均衡一定存在.

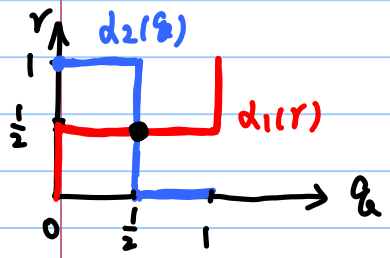
其中 给定 参与人2 采用 $r \in \tilde{S}_2 = [0,1]$,

参与人1的最优 $q \in \alpha_1(r)$;

给定 参与人1 采用 $q \in \tilde{S}_1 = [0,1]$,

参与人2的最优 $r \in \alpha_2(q)$.

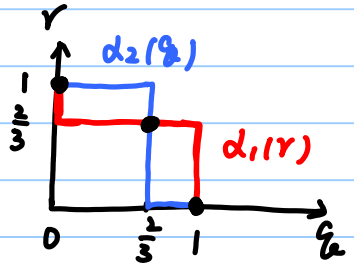
例如 (1) 两人对称博弈



唯一的纳什均衡

$r = q = \frac{1}{2}$

(2) 性别博弈



三个纳什均衡

① $q=0, r=1$ ② $q=1, r=0$

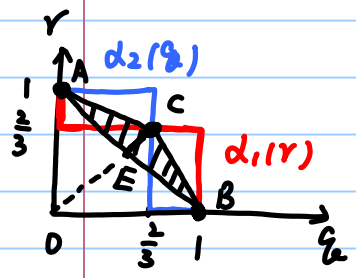
③ $q = r = \frac{2}{3}$.

相关均衡 数学角度上 是所有纳什均衡的"凸"组合.

因此 (1) 两人对称博弈 仍旧只有唯一的相关均衡，

就是 唯一的纳什均衡

(2) 性别博弈的相关均衡 则有 无数多个，



实际上 图形上表现为 所有纳什均衡的连线所围的整个区域(含边界)

如图 三角ABC内部区域，包含一个凸集.

由点A、B、C所生成的凸集.

当解(相关均衡解)有无数多个，可以通过 参与人的私有信号来进行选择. 此时私有信号有两个性质

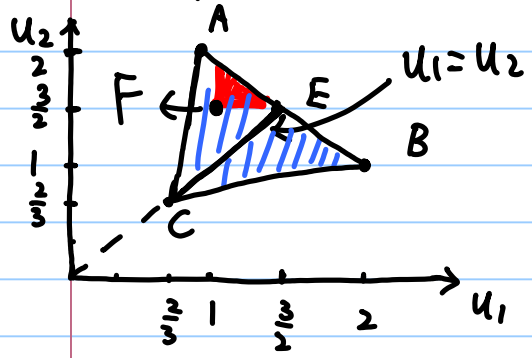
① 相容性有效 (AB连线上私有信号性有效的)

② 平等. (CE连线是平等线)

因此 只有唯一点 E 实现了有效及平等.

E点就是上节所说的 $\begin{cases}\frac{1}{2}\text{概率选择(主导,从属)}\\ \frac{1}{2}\text{概率选择(从属,主导)}\end{cases}$

从上证明需要如下补用图.



再来看E点的实际实现方式:

E点: $\begin{cases}\frac{1}{2}\text{概率选择(主导,从属)}\\ \frac{1}{2}\text{概率选择(从属,主导)}\end{cases}$

① 如果是男女约会,只要轮流选择陪对方做对方喜欢的事便可.

② 而如果是社会制度上的性别歧视问题,解决起来要复杂得多.

上节提供了一种方式 $\begin{cases}\text{道德:歧视女性}\\ \text{法律:歧视男性.}\end{cases}$

"理想":通过法律手段使道德观念的快速改变!

从下说明两个细节:

(i) 在这里,平等观念不是绝对的平等观念,

当具体到某个方面时,仍然是不平等的.

甚至可以说,平等是由此处不平等构成的!

(ii) 概率实现角度.如果男女约会双方选择动机不同,就采取决定看球,还是购物,例如正面看球,反面购物.

假设反面出现了,男方不能因为这对自己不利而拒绝执行!

这个问题引发一个问题:如果概率实现是一次决定的,那会怎么样?例如以下"多次事件":

来源于 以秦主的狡辩术.

上述性别平等是结构平等的事实.

现实中更可能存在利益结构不平等的事实，例如

"1" \ "2"	1	2
1	(9,1)	(0,0)
2	(0,0)	(5,4)

纳什均衡为 (1,1), (2,2).

数学上能证明协调博弈有如下的相关均衡是这两个纯策略纳什均衡的凸组合.

具体实现如下：以概率 p 实现 (1,1)
以概率 $1-p$ 实现 (2,2)

因此 秦5人1的效用 $u_1 = 9p + 5(1-p)$,
秦5人2的效用 $u_2 = p + 4(1-p)$.

功利主义原则：$\max_p \ u_1+u_2 = 10p + 9(1-p)$
(资本主义) $= p + 9$

得到 $p=1$.

即 以概率1选择 (1,1).

加剧社会不平等.

最大化最小者原则：$\max_p \ \min\{u_1, u_2\} = \min\{9p+5(1-p), p+4(1-p)\}$
(社会主义) $= p+4(1-p)$
$= 4-3p$

得到 $p=0$

即 以概率1 选择 (2,2).

继续回到混合策略的一种看法：秦5人1 选择混合策略 $x_1 = (q, 1-q)$，要权地说，秦5人1的选择，是让 秦5人2 相信 秦5人1 选择了这样的混合策略 $x_1 = (q, 1-q)$.

这样说的原因，秦5人1 虽然说他采用的是混合策略，

但最终需要选定一个纯策略. 例如在对决中，守门员的混合策略 $x_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，实现时用抛硬币决定，正面向左，反面向右. 当抛完硬币后，如果正面向上（注意不能让罚球员看到），则守门员决定了他要采用的纯策略向左扑，此时不能更改！

事实上 首先能证明：假设 $x_1^*=(q^*,1-q^*)$，$x_2^*=(r^*,1-r^*)$，(x_1^*,x_2^*) 构成NE的什么时候？

如果 $q^*\in(0,1)$，（称 x_1^* 为 非退化 的混合策略），

则 $u_1(x_1^*,x_2^*)=u_1(x_1,x_2^*)$，$\forall x_1\in\Delta_1$.

特别地，取 $x_1=(1,0)$ 或 $(0,1)$，也即代表的是退化的混合策略，即纯策略 1 或 2.

也就是说，参与1采用哪个纯策略，对用处都相同的！

文字语言：参与人1只要让对方相信自己用的是混合策略 $x_1^*=(q^*,1-q^*)$，而至于实际中自己用的是哪一个纯策略 实际上无差别.

例如：(1) 两对博弈

		罚球员 左	罚球员 右
守门员	左	(1,-1)	(-1,1)
守门员	右	(-1,1)	(1,-1)

$$\begin{cases}u_1(x_1,x_2)=(1-2r)+(4r-2)q\\ u_2(x_1,x_2)=(2q-1)+(2-4q)r\end{cases}$$

$x_1^*=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$x_2^*=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$(q,1-q)$

$$u_1(x_1,x_2^*)=u_1\big|_{r=\frac{1}{2}}=0,\quad \forall x_1\in\Delta_1$$

$$u_2(x_1^*,x_2)=u_2\big|_{q=\frac{1}{2}}=0$$

这个性质 带来一种新的 寻找非退化的混合策略的NE什么时候 解的方法！

推论（至少1个什么情况）解：假设 $x_1^* = (q^*, 1-q^*)$，

$x_2^* = (r^*, 1-r^*)$，(x_1^*, x_2^*) 构成1个什么情况。

如果 $q^* \in (0,1)$，（称 x_1^* 为 非退化 的混合策略），

则 $u_1(e_1^1, x_2^*) = u_1(e_1^2, x_2^*)$，

其中 $e_1^1 = (1,0)$ 代表参与人1的1号策略1，

$e_1^2 = (0,1)$ 代表参与人1的1号策略2；

如果 $r^* \in (0,1)$，

则 $u_2(x_1^*, e_2^1) = u_2(x_1^*, e_2^2)$，

其中 $e_2^1 = (1,0)$，$e_2^2 = (0,1)$.

例如：(1) 两2对1博弈

守门员 \ 罚球员	左	右
左	(1, -1)	(-1, 1)
右	(-1, 1)	(1, -1)

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2) = (1-2r) + (4r-2)q \\ u_2(x_1, x_2) = (2q-1) + (2-4q)r \end{cases}$$

方法：(1) 首先要证这个博弈没有1号策略的1个什么情况（画图法）

(2) 设 (x_1^*, x_2^*) 为1个什么情况，$x_1^* = (q^*, 1-q^*)$，$x_2^* = (r^*, 1-r^*)$.

如果 $q^* \in (0,1)$，即 x_1^* 为非退化的，

则有 $u_1(e_1^1, x_2^*) = u_1|_{q=1,\, r=r^*} = 2r^* - 1$

守门员 \ 罚球员	r^* 左	$1-r^*$ 右
左	(1, -1)	(-1, 1)
右	(-1, 1)	(1, -1)

直接计算 $r^* \cdot 1 + (1-r^*) \cdot (-1)$

$= 2r^* - 1$

$u_1(e_1^2, x_2^*) = r^* \cdot (-1) + (1-r^*) \cdot 1 = 1 - 2r^*$

两者相等 $\Rightarrow 2r^* - 1 = 1 - 2r^* \Rightarrow r^* = \frac{1}{2}$.

结论：只有 "2" 采用 $x_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 时，参与人1才会采用非退化的混合策略.

如果 $r^* \in (0,1)$，即 x_2^* 也非退化的.

则有

守门员 \ 罚球员	左	右
q^* 左	(1, -1)	(-1, 1)
$1-q^*$ 右	(-1, 1)	(1, -1)

$u_2(x_1^*, e_2^1) = q^* \cdot (-1) + (1-q^*) \cdot 1$

$= 1 - 2q^*$

$u_2(x_1^*, e_2^2) = q^* \cdot 1 + (1-q^*) \cdot (-1)$

$= 2q^* - 1$

两者相等 $\Rightarrow q^* = \frac{1}{2}$

结论2：只有"1"采用 $x_1^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 时，参与人2才会采用非退化的混合策略.

结论1：只有"2"采用 $x_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 时，参与人1才会采用非退化的混合策略.

因此：$x_1^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，$x_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 构成1阶什纳什均衡.

这个问题带来的疑惑如何让对方觉得你采用的是这样"确定"的混合策略.

"相关"到底是怎么实现的？

为理解这个问题，设计了从下述题.

首先给每位同学发送 8 分.

获得2分的分配方式如下：

假设参加测验的同学有 n 人.

一共有两个测验，每个测验的选择都是A与B中的一个.

测验一：A、B发生概率为 $P(A)=60\%$，$P(B)=40\%$.

首先大家都作出 A 或 B 的选择. A有 n_1 人，B有 n_2 人.

用满足上述相关要求的方式产生 A 或 B.

没有选中的同学不加分.

如果A实现，则选择A的同学加 $\frac{n}{n_1}$ 分，

如果B实现，则选择B的同学加 $\frac{n}{n_2}$ 分.

测验二：与测验一类似，只是将A、B发生相关手作修改. 即 $P(A)=70\%$，$P(B)=30\%$.

姓名. 学号. 学院

选择: "(A,A), (A,B), (B,A), (B,B) 中的一个" 不能重复不分, 也不计入总人数.

A,B产生机制:

试验一: 产生随机数 $\underbrace{0,1,2,\cdots,5}_{A}\ \underbrace{6,7,8,9}_{B}$

试验二: 产生随机数 $\underbrace{0,1,2,\cdots,5,6}_{A}\ \underbrace{7,8,9}_{B}$

两组随机数为独立.

以试验一为例, 结果会是 $\frac{n_1}{n}\approx 60\%$ 吗?

分析: (1) 如果 $\frac{n_1}{n}>60\%$. 则 $\frac{n_2}{n}<40\%$

选择 A, 期望分为 $60\%\cdot\frac{n}{n_1}+40\%\cdot 0 \approx 1$

选择 B, 期望分为 $40\%\cdot\frac{n}{n_2}>1$

因此 应选择 B.

(2) 类似地, 如果 $\frac{n_1}{n}<60\%$, 则应选择A.

(3) 如果 $\frac{n_1}{n}=60\%$, 则选择 A 或 B 无差异.

也就是说, 如果 $\frac{n_1}{n}=60\%$, 就没有人会改变自己的选择.

我们的试验不经协商, 会有多大的巧合?

7月25日

上节试验结果：有效试验人数102人

试验一：P(A)=60%，P(B)=40%

选A的同学有55人，占54%，与60%相差6%

选A的同学不加分.

选B的同学有47人，加分 $\frac{102}{47}\approx 2.07$

(突附加分为2分)

试验二：P(A)=70%，P(B)=30%

选A的同学有69人，占68%，与70%相差2%

选A的同学不加分.

选B的同学有33人，加分 $\frac{102}{33}\approx 3.09$

(突附加分为3分)

汇总：(A,A) 37人，没有加分；

(B,A) 32人，加分2分；

(A,B) 18人，加分3分；

(B,B) 15人，加分5分.

六. 进一步扩展问题.

至此所讲的博弈称之为完全信息静态博弈.

进一步的扩展，可以将完全信息扩展成不完全信息，

也即某种信息是其中一个参与人的私有信息；

还可以将静态博弈扩展成动态博弈，其中一种

动态博弈是重复博弈，即可以重复进行.

(一) 不完全信息问题

以下以一个例子为例，

"1" \ "2"	恨	爱
恨	$(-10, -10)$	$(a_1, -20)$
爱	$(-20, a_2)$	$(10, 10)$

"只关注效用数值大小关系，具体数值的大无关."

若 $a_1 \le 10$, $a_2 \le 10$

这个例子之前分析过，

只有一方爱一方恨时恨的效用数值大小关系不明确！

博弈分析基本前提是，$G=(I, S, T)$ 是公共知识假设！

因此，当 a_1, a_2 是某两个明确数值，也即作为公共知识与预时，(恨，恨) 必然还是各种情形的纳什均衡，

只有当 $a_1 \le 10$ 且 $a_2 \le 10$ 时，(爱，爱) 是纳什均衡了.

现在的好处是：

可以假设：a_1 是参与人 1 的私有信息，

a_2 是参与人 2 的私有信息.

不是问题便转化为了不完全信息问题.

这类问题的解决需要引入"更强的假设".

例如假设 a_2 是参与人 2 的私有信息，

但参与人 1 关于 a_2 的信息并非完全未知，

比如将 a_2 看成是服从某个分布的随机变量.

需要注意的是：参与人 1 对于 a_2 的认识也可以假设为是参与人 1 的私有信息. 只是这样假设，则还需继续假设参与人 2 对"参与人 1 对于 a_2 的认识"有个认识，而这个认识也可以是参与人 2 的私有信息，… 因此，

这里假设参与人 1 对于 a_2 的认识是公共知识假设.

为问题简便假设参与人 1 对于 a_2 的认识是

随机变量 $a_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 20 \\ q & p \end{pmatrix}$,

其中 $q=1-p$, $0<p<1$.

p 为某个确定的数值. 并且参与人2的类型只有这两种 ("好人" / "坏人")

(21) $a_2 = 20$, (22) $a_2 = 0$.

(这是为了问题简便假设 a_1 是公共知识)

参与人1认为自己以概率 p 遇见 $a_2 = 20$ 的参与人2 ("坏人")

以概率 q 遇见 $a_2 = 0$ 的参与人2 ("好人").

"概率 p"

"1" \ "2"	恨	爱
恨	$(-10, -10)$	$(a_1, -20)$
爱	$(-20, 20)$	$(10, 10)$

△

"概率 q"

"1" \ "2"	恨	爱
恨	$(-10, -10)$	$(a_1, -20)$
爱	$(-20, 0)$	$(10, 10)$

△

此时将博弈扩展成三个参与人: 其中一个还参与人1

另外两个是 $a_2 = 20$ 的参与人2, 记为 21 (坏人)

$a_2 = 0$ 的参与人2. 记为 22. (好人)

因此 $\tilde{I} = \{1, 21, 22\}$

而第时集 $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_{21} = \tilde{S}_{22} = \{1, 2\} = \{\text{"恨"}, \text{"爱"}\}$

再考虑这三个参与人的利用函数

其中参与人1的利用函数 p: 坏人 q: 好人

(i) $\tilde{\pi}_1(s_1, s_{21}, s_{22}) = p\,\pi_1(s_1, s_{21}) + q\,\pi_1(s_1, s_{22})$.

$s_1 \in \tilde{S}_1$, $s_{21} \in \tilde{S}_{21}$, $s_{22} \in \tilde{S}_{22}$

参与人21的利用函数 坏人

(ii) $\tilde{\pi}_{21}(s_1, s_{21}, s_{22}) = \pi_2(s_1, s_{21})$.

参与人22的利用函数 好人

(iii) $\tilde{\pi}_{22}(s_1, s_{21}, s_{22}) = \pi_2(s_1, s_{22})$.

因此, 有以下利用表.

① 参与人1选择 "1"

"21" \ "22"	1	2
1	$(-10, -10, -10)$	$(-10p + a_1 q, -10, -20)$
2	$(a_1 p - 10q, -20, -10)$	$(a_1, -20, -20)$

≃

"相关子节" "21"

"1"	"2" 恨	"2" 爱
恨	$(-10,-10)$	$(a_1,-20)$
爱	$(-20,20)$	$(10,10)$

"相关子集" "22"

"1"	"2" 恨	"2" 爱
恨	$(-10,-10)$	$(a_1,-20)$
爱	$(-20,0)$	$(10,10)$

② 参与人1 选择 "2"

"22"

"21"	1	2
1	$(-20,20,0)$	$(-20p+10q,20,10)$
2	$(10p-20q,10,0)$	$(10,10,10)$

因此有：

参与人1 选择 "1"

"22"

"21"	1	2
1	$(-10,-10,-10)$	$(-10p+a_1q,-10,-20)$
2	$(a_1p-10q,-20,-10)$	$(a_1,-20,-20)$

参与人1 选择 "2"

"22"

"21"	1	2
1	$(-20,20,0)$	$(-20p+10q,20,10)$
2	$(10p-20q,10,0)$	$(10,10,10)$

(1) 假设 $a_1=20$. (舍不入)

参与人1 选择 "1"

"22"

"21"	1	2
1	$(-10,-10,-10)$	$(-10p+20q,-10,-20)$
2	$(20p-10q,-20,-10)$	$(20,-20,-20)$

参与人1 选择 "2"

"22"

"21"	1	2
1	$(-20,20,0)$	$(-20p+10q,20,10)$
2	$(10p-20q,10,0)$	$(10,10,10)$

因此，有唯一一个纳什均衡了.

a_2 的学生2 选择 "1"，$a_2=20$ 的学生2 选择 "1"

$a_2=0$ 的学生2 选择 "1".

事实上，这里对学生1 而言 "1" 严格占优 "2".

学生1 选择 "1"

"21" \ "22"	1	2
1	$(-10,\ -10,-10)$	$(-10p+20q,\ -10,\ -20)$
2	$(20p-10q,-20,-10)$	$(20,\ -20,\ -20)$

~~学生1 选择 "2"~~

"21" \ "22"	1	2
1	$(-20,\ 20,\ 0)$	$(-20p+10q,\ 20,\ 10)$
2	$(10p-20q,\ 10,\ 0)$	$(10,\ 10,\ 10)$

因此：这个纳什均衡解也是理性作为公共知识假设的严格占优解.

(1) 假设 $a_1>10$，结果仍然一样. (性不人)

(2) 假设 $a_1=0$ (好人)

学生1 选择 "1"

"21" \ "22"	1	2
1	$(-10,\ -10,-10)$	$(-10p,\ -10,\ -20)$
2	$(-10q,-20,-10)$	$(0,\ -20,\ -20)$

学生1 选择 "2"

21" \ "22"	1	2
1	$(-20,\ 20,\ 0)$	$(-20p+10q,\ 20,\ 10)$
2	$(10p-20q,\ 10,\ 0)$	$(10,\ 10,\ 10)$

" $-10q>10p-20q$ $\Leftrightarrow q>p \Leftrightarrow p<\frac{1}{2}$ "

" $-10p<-20p+10q$ $\Leftrightarrow p<q \Leftrightarrow p<\frac{1}{2}$ "

(i) 假设 $p<\frac{1}{2}$ 时，学生1 认为坏人少，好人多.

多5人1 选择"1"

"21" \ "22"	1	2
1	$(-10, -10, -10)$	$(-10p, -10, -10)$
2	$(-10q, -20, -10)$	$(0, -20, -20)$

多5人1 选择"2"

"21" \ "22"	1	2
1	$(-20, 20, 0)$	$(-20p+10q, 20, 10)$
2	$(10p-20q, 10, 0)$	$(10, 10, 10)$

因此，有两个纳什均衡解：(1) 都选"1"

(2) 多5人1选择"2" 对角：$-20p+10q = 10-30p \in (-5, 10)$

(坏人) $a_2 = 20$ 的多5人2 选择"1" 对角：20

(好人) $a_2 = 0$ 的多5人2 选择"2" 对角：10

(ii) 假设 $p > \frac{1}{2}$ 时，

多5人1 选择"1"

"21" \ "22"	1	2
1	$(-10, -10, -10)$	$(-10p, -10, -10)$
2	$(-10q, -20, -10)$	$(0, -20, -20)$

多5人1 选择"2"

"21" \ "22"	1	2
1	$(-20, 20, 0)$	$(-20p+10q, 20, 10)$
2	$(10p-20q, 10, 0)$	$(10, 10, 10)$

此时仍然只有唯一的纳什均衡解

即大家都选择"小偷".

(iii) 假设 $p = \frac{1}{2}$. 同"$p < \frac{1}{2}$".

总结：多5人1是坏人，大家都选"小偷"

多5人1是好人，如果他认为多5人2更可能是坏人时，

大家都选"小偷"

只有当玩家1是好人，且他认为玩家2更可能是好人时，
此时，玩家1才可能选"爱"，
而玩家2如果是坏人，仍选"恨"，
如果是好人，则选"爱".

这个结果和直观感觉完全吻合.

(二) 动态博弈问题.

仍旧看这个例子 $a_1 = a_2 = 20$ (坏人)

"1" \ "2"	恨	爱
恨	(-10, -10)	(20, -20)
爱	(-20, 20)	(10, 10)

这是个囚徒困境，(恨，恨)是劣格占优解.

假设这个博弈试验可以重复进行.

如果试验的重复次数是有限次，且为某个明确的次数，则此时的博弈结果是每次试验，每个玩家都选择"恨"，依旧陷入到囚徒困境中.

但如果试验的重复次数是无限次.

并且假设存在一个折现因子 δ. $(0<\delta<1)$

即在第t期的效用为π，这个效用值相当于是一开始时的效用 $\delta^t\pi$.

在这种假设下，都选"恨"仍然是纳什均衡.

但现在有在这样的纳什均衡了：

每个玩家一开始选择"爱"，直到有一方背弃"爱"选择"恨"时，则从此开始一直选"恨".

这个纳什均衡使得双方都选择"爱"这样的"结果"变为可能.

试验的重复次数必无限次，可以改为

"有个很小的中止概率 p. 即首先进行第1次试验，第1次试验结束后，以概率 p 停车中止，以概率 $1-p$ 进行第2次试验，第2次试验结束后，以概率 p 停车中止，以概率 $1-p$ 进行第3次试验，… "

在这种情况下，上述1的什么性质仍然存在.